Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Rafał Filipów

WŁASNOŚĆ RÓŻNICY W SENSIE DE BRUIJNA DLA RODZIN FUNKCJI MIERZALNYCH

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dr. hab. Ireneusza Recława, prof. UG

Pracę nad rozprawą częściowo finansowano
z grantu promotorskiego KBN nr 2 PO3A 005 23

Sopot 2004

Spis treści

Wstęp

Funkcję $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją addytywną,* gdy spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego:

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Wiadomo, że każda ciągła funkcja addytywna jest postaci $A(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Z drugiej strony, Hamel jako pierwszy podał przykład nieciągłej funkcji addytywnej.

Dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $h \in \mathbb{R}$ definiujemy *funkcję różnicową* $\Delta_h f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej funkcji addytywnej $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wszystkie jej funkcje różnicowe $\Delta_h f$ są funkcjami ciągłymi. Pamiętając o funkcji addytywnej skonstruowanej przez Hamela możemy powiedzieć, że istnieją funkcje nieciągłe mające ciągłe funkcje różnicowe. Co więcej, Ostrowski [Ost29] pokazał, że funkcja skonstruowana przez Hamela jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a, czyli prawdą jest, że funkcje różnicowe funkcji niemierzalnej w sensie Lebesgue'a mogą być ciągłe.

Powstaje więc naturalne pytanie: co można powiedzieć o funkcjach, których wszystkie funkcje różnicowe są ciągłe? Erdős przypuszczał, że funkcja o ciągłych funkcjach różnicowych jest sumą dwóch funkcji: funkcji ciągłej i funkcji addytywnej. W 1951 roku hipoteza Erdősa została udowodniona przez de Bruijna [dB51].

Twierdzenie 0.0.1 (de Bruijn [dB51])**.** *Jeżeli $\Delta_h f$ jest funkcją ciągłą dla każdego $h \in \mathbb{R}$, to $f = g + A$, gdzie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną.*

W tej samej pracy de Bruijn wprowadził pojęcie *własności różnicy.* Mówimy, że rodzina funkcji rzeczywistych $\mathcal{F}$ ma *własność różnicy,* jeżeli dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której wszystkie funkcje różnicowe $\Delta_h f \in \mathcal{F}$, znajdziemy funkcję $g \in \mathcal{F}$ oraz funkcję addytywną $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f = g + A$.

Poza udowodnieniem własności różnicy dla rodziny funkcji ciągłych, de Bruijn zbadał w pracy [dB51] własność różnicy dla innych rodzin, m.in. funkcji różniczkowalnych, funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły. Od tamtej pory własnością różnicy zajmowało się wielu matematyków. Dobrym źródłem informacji jest praca przeglądowa Laczkovicha [Lac02].

W Rozdziale 2 przedstawiamy wyniki, które dotyczą własności funkcji addytywnych i sum algebraicznych zbiorów mierzalnych. Niektóre z tych własności są związane z własnością różnicy (patrz Rozdział 6).

Pokazujemy między innymi, że istnieje (s)-mierzalna funkcja addytywna, która jest nieciągła. Wiadomo, że podobny wynik jest nieprawdziwy dla funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ([Fré13]). Ponadto konstruujemy zbiór $A \in (s_0)$ taki, że

$A + A$ nie jest (s)-mierzalny. W tym przypadku mamy pełną zgodność z miarą Lebesgue'a ([Sie20]). Wyniki zawarte w tym rozdziale pochodzą z prac [DFa] oraz [DFb].

Tematyka tego rozdziału jest badana przez wielu autorów (patrz m.in. [BK03], [CJ03], [CFF02], [Kha56b], [Kys]).

Rozdział 3 dotyczy własności różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a. Erdős jako pierwszy podał przykład funkcji, której wszystkie funkcje różnicowe są mierzalne w sensie Lebesgue'a, ale funkcja ta nie jest sumą funkcji mierzalnej i addytywnej ([dB51]). Jego przykład był skonstruowany przy założeniu CH.

Twierdzenie 0.0.2 (Erdős)**.** *Załóżmy CH. Rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a nie ma własności różnicy.*

Przez około 50 lat nie było wiadomo, czy przykład taki można skonstruować w ZFC (bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych). Dopiero Laczkovich udowodnił w pracy [Lac99], że jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma własność różnicy (czyli nie można skonstruować w ZFC funkcji o własnościach takich jak funkcja skonstruowana przez Erdősa).

Twierdzenie 0.0.3 (Laczkovich [Lac99])**.** *Jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma własność różnicy.*

Łatwo pokazać, że funkcja skonstruowana przez Erdősa jest również „świadkiem" na brak własności różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a ([BKW99]).

Twierdzenie 0.0.4. *Załóżmy CH. Rodzina funkcji z własnością Baire'a nie ma własności różnicy.*

Pojawia się więc analogiczny problem, jak dla funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Problem (Laczkovich [Lac02])**.** Czy jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy?

Pewne wyniki dotyczące własności różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a uzyskał Recław [Rec]. Pokazał on, że jeżeli funkcje różnicowe funkcji ograniczonej mają własność Baire'a, to również ta funkcja ma własność Baire'a (innymi słowy rodzina ograniczonych funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy).

W Rozdziale 3 podajemy całkowite rozwiązanie problemu Laczkovicha.

W drugiej części tego rozdziału pokażemy, że słaba własność różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a implikuje podwójną własność różnicy dla tej rodziny.

Wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [Fil03b] oraz [Fil01].

W Rozdziale 4 zajmujemy się własnością różnicy dla funkcji mierzalnych w sensie Marczewskiego. Pokazujemy, że rodzina funkcji (s)-mierzalnych nie ma własności różnicy. Wyniki z tego rozdziału pochodzą z pracy [FR02].

Rozdział 5 jest poświęcony funkcjom borelowskim. Rodzina funkcji borelowskich była badana przez Laczkovicha. Zauważył on, że dowód Erdősa (pokazujący, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a nie ma własności różnicy przy CH) działa również dla funkcji borelowskich (przy założeniu CH), jak i dla funkcji klasy α Baire'a ($\alpha > 1$).

Twierdzenie 0.0.5. *Załóżmy CH. Rodzina funkcji borelowskich nie ma własności różnicy. Dla każdego* $\alpha > 1$ *rodzina funkcji klasy* α *Baire'a nie ma własności różnicy.*

Pokazał on również, że funkcje pierwszej klasy Baire'a mają własność różnicy (w ZFC).

Twierdzenie 0.0.6 (Laczkovich [Lac02])**.** *Rodzina funkcji pierwszej klasy Baire'a ma własność różnicy.*

Niestety nie wiadomo, czy rodzina funkcji borelowskich nie ma własności różnicy w ZFC.

Badając własność różnicy dla funkcji borelowskich, Laczkovich postawił następujący problem.

Problem (Laczkovich [Lac80])**.** Załóżmy, że wszystkie funkcje różnicowe funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są borelowskie. Czy istnieje $\alpha < \omega_1$ takie, że wszystkie funkcje różnicowe funkcji f są klasy α Baire'a?

W Rozdziale 5 przedstawiamy rozwiązanie tego problemu. Problem ten rozwiązujemy przy założeniu CH, dając odpowiedź negatywną. Taka sama odpowiedź jest przy założeniu CPA, jak pokazali później Ciesielski i Pawlikowski [CPb] (patrz również [CPa]). Niestety, wciąż nie jest znana odpowiedź w ZFC, a nawet przy założeniu Aksjomatu Martina (MA).

Wyniki z tego rozdziału pochodzą z pracy [FR02].

W Rozdziale 6 udowodnimy pewne ogólne twierdzenia dotyczące własności różnicy dla rodzin funkcji mierzalnych. Następnie zastosujemy te twierdzenia do zbadania własności różnicy dla pewnych rodzin funkcji mierzalnych. Wyniki z tego rozdziału pochodzą z pracy [Fil03a].

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

Niech G, H będą grupami. Funkcję $A: G \to H$ nazywamy *funkcją addytywną* (albo *homomorfizmem*), gdy spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego:

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$.

Dla dowolnej funkcji $f: G \to H$ oraz $g \in G$ definiujemy *funkcję różnicową*

$$\Delta_g f: G \to H$$

wzorem

$$\Delta_g f(x) = f(x+g) - f(x).$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji zdefiniowanych na G o wartościach w H.

Definicja 1.0.7 (N. G. de Bruijn [dB51])**.** Mówimy, że rodzina funkcji $\mathcal{F}$ ma *własność różnicy*, gdy każda funkcja f taka, że $\Delta_g f \in \mathcal{F}$ dla każdego $g \in G$ jest postaci $f = g + A$, gdzie $g \in \mathcal{F}$, a A jest funkcją addytywną.

Dla funkcji $f: G \to H$ definiujemy funkcję

$$Df: G \times G \to H$$

wzorem

$$Df(x, y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną funkcji zdefiniowanych na $G \times G$ o wartościach w H.

Definicja 1.0.8 (Laczkovich [Lac80])**.** Jeżeli dowolna funkcja $f: G \to H$ taka, że $Df \in \mathcal{G}$ jest postaci $f = g + A$, gdzie $A: G \to H$ jest homomorfizmem, a $g \in \mathcal{F}$, to mówimy, że para $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ma *podwójną własność różnicy.*

W szczególnych przypadkach, gdy rodzina $\mathcal{G}$ jest rodziną funkcji mających „te same" własności, co funkcje z rodziny $\mathcal{F}$, tylko zdefiniowanych na „płaszczyźnie", to będziemy nadużywać definicji, mówiąc, że rodzina $\mathcal{F}$ ma podwójną własność różnicy. Na przykład mówimy, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma podwójną własność różnicy, gdy para $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ ma podwójną własność różnicy, gdzie $\mathcal{L}(\mathbb{R})(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ oznacza rodzinę funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a zdefiniowanych na $\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$. Analogicznie dla funkcji z własnością Baire'a, borelowskich i innych.

W pracy tej będziemy mówić o jeszcze jednym rodzaju własności różnicy. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem podzbiorów grupy G.

Definicja 1.0.9. Mówimy, że rodzina funkcji $\mathcal{F}$ ma *$\mathcal{J}$-słabą własność różnicy*, gdy każda funkcja f taka, że $\Delta_g f \in \mathcal{F}$ dla każdego $g \in G$ jest postaci $f = g + A + S$, gdzie $g \in \mathcal{F}$, A jest homomorfizmem, a S jest taką funkcją, że $\{x\colon \Delta_g S(x) \neq 0\} \in \mathcal{J}$ dla każdego $g \in G$.

Słaba własność różnicy została zdefiniowana w pracy [Lac80] dla ideału zbiorów miary zero, a w pracy [BKW99] dla dowolnego ideału.

W szczególnych przypadkach będziemy nadużywać definicji, mówiąc o słabej własności różnicy, gdy wiadomo o jakim ideale jest mowa. Na przykład, będziemy pisali o słabej własności różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a, mając na uwadze ideał zbiorów pierwszej kategorii. Analogicznie dla funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i innych.

1.1 Definicje i oznaczenia

Własność Baire'a

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Zbiór $A \subseteq X$ ma *własność Baire'a,* jeżeli jest różnicą symetryczną zbioru otwartego i zbioru pierwszej kategorii. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma *własność Baire'a,* gdy $f^{-1}(U)$ ma własność Baire'a dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ (tzn. f jest mierzalna względem σ-ciała zbiorów z własnością Baire'a).

Przez $\mathcal{B}(X)$ będziemy oznaczali rodzinę zbiorów z własnością Baire'a w X oraz przez $\mathcal{M}(X)$ rodzinę zbiorów pierwszej kategorii w X. Dla ułatwienia będziemy pisali $\mathcal{B}$ i $\mathcal{M}$, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Mierzalność w sensie Marczewskiego

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór domknięty $A \subseteq X$ nazywamy *zbiorem doskonałym,* jeżeli żaden jego element nie jest izolowany. Przyjmujemy, że zbiór pusty nie jest doskonały.

Zbiór $A \subseteq X$ jest *mierzalny w sensie Marczewskiego* ((s)-mierzalny), jeżeli w każdym zbiorze doskonałym $P \subseteq X$ znajdziemy podzbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \subseteq A$ lub $Q \cap A = \emptyset$. Zbiór $A \subseteq X$ jest *zbiorem* (s_0) (*zbiorem zerowym Marczewskiego*), jeżeli w każdym zbiorze doskonałym $P \subseteq X$ znajdziemy podzbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \cap A = \emptyset$.

Zbiory (s)-mierzalne zostały wprowadzone przez Marczewskiego [Szp35].

Przez $(s)(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich (s)-mierzalnych podzbiorów X, natomiast przez $(s_0)(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów zerowych Marczewskiego w X. Jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, to będziemy pisali (s) i (s_0).

Wiadomo, że jeżeli przestrzeń X jest przestrzenią polską, to rodzina (s_0) jest σ-ideałem, a (s) - σ-ciałem podzbiorów X.

Funkcja $f\colon X \to Y$ jest (s)*-mierzalna,* jeżeli przeciwobrazy zbiorów otwartych są (s)-mierzalne (tzn. funkcja f jest mierzalna względem σ-ciała (s)). W dalszej części będziemy korzystali z następującej charakteryzacji funkcji (s)-mierzalnych.

Twierdzenie 1.1.1 (Marczewski [Szp35])**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi. Funkcja $f\colon X \to Y$ jest (s)-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym zbiorze doskonałym $P \subseteq X$ znajdziemy podzbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $f \restriction Q$ jest ciągła (borelowska).*

Miara

Przez *miarę* na X rozumiemy przeliczalnie addytywną, nieujemną, niezerową, o wartościach w rozszerzonej prostej rzeczywistej, funkcję zdefiniowaną na σ-ciele $\mathcal{A}$ podzbiorów X. Przez m oznaczamy miarę Lebesgue'a zdefiniowaną na $\mathbb{R}$. Przez $\mathcal{L}(\mu)$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów μ-mierzalnych, a przez $\mathcal{N}(\mu)$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów μ-miary zero. Dla prostoty piszemy $\mathcal{L}$ lub $\mathcal{N}$, jeżeli wiadomo o jaką miarę chodzi.

Miara μ jest:

- *ciągła,* jeżeli $\mu(\{x\}) = 0$ dla każdego $x \in X$;
- *skończona,* jeżeli $\mu(X) < +\infty$;
- σ*-skończona,* jeżeli X jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów miary skończonej.

Miary μ i ν są *równoważne,* jeżeli

1. $(\forall A \subseteq X)(A$ jest μ-mierzalny $\Leftrightarrow A$ jest ν-mierzalny$)$,
2. $(\forall A \subseteq X)(\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0)$.

Fakt 1.1.2. *Każda σ-skończona miara jest równoważna z pewną miarą skończoną.*

Przez *miarę uniwersalną* na X rozumiemy ciągłą i skończoną miarę zdefiniowaną dla wszystkich podzbiorów X.

Niech κ będzie liczbą kardynalną. Miara μ jest κ*-addytywna,* jeżeli $\mu(\bigcup \mathcal{F}) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F)$ dla dowolnej rodziny $\mathcal{F}$ zbiorów parami rozłącznych takiej, że $|\mathcal{F}| < \kappa$.

Mówimy, że nieprzeliczalna liczba kardynalna κ jest *rzeczywiście mierzalna,* jeśli istnieje κ-addytywna, uniwersalna miara na κ. Liczba κ jest *mierzalna,* jeśli istnieje dwuwartościowa, κ-addytywna, uniwersalna miara na κ.

W Rozdziale 6 będziemy korzystali z następujących twierdzeń.

Twierdzenie 1.1.3. *Jeżeli istnieje miara uniwersalna na zbiorze X, to istnieje rzeczywiście mierzalna liczba kardynalna $\leqslant |X|$. Ponadto, jeżeli istnieje dwuwartościowa miara uniwersalna na zbiorze X, to istnieje mierzalna liczba kardynalna $\leqslant |X|$.*

Twierdzenie 1.1.4. *Każda mierzalna liczba kardynalna jest większa od $\mathfrak{c}$.*

Ideały

Mówimy, że $\mathcal{I} \subseteq P(X)$ jest *ideałem* na X, jeżeli:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$,
2. $(\forall A, B \in \mathcal{I})(A \cup B \in \mathcal{I})$,
3. $(\forall A \in \mathcal{I})(\forall B \subseteq A)(B \in \mathcal{I})$.

Ideał $\mathcal{I}$ na X jest:

- *właściwy,* jeśli $X \notin \mathcal{I}$;
- *pierwszy,* jeśli dla każdego $A \subseteq X$, albo $A \in \mathcal{I}$, albo $X \setminus A \in \mathcal{I}$;
- *σ-ideałem* (lub ω_1-zupełny), jeśli $\mathcal{I}$ jest zamknięty na przeliczalne sumy zbiorów z $\mathcal{I}$ (tzn. $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{I}$, jeśli $A_n \in \mathcal{I}$ dla każdego n);
- *κ-zupełny,* jeśli $\mathcal{I}$ jest zamknięty na sumy mniej niż κ zbiorów z $\mathcal{I}$ (tzn. $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{I}$ dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $|\mathcal{F}| < \kappa$);
- *κ-nasycony,* jeśli każda rodzina $\mathcal{F} \subseteq P(X) \setminus \mathcal{I}$ parami rozłącznych zbiorów ma moc $< \kappa$.

Rodzinę $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ nazywamy *bazą* ideału $\mathcal{I}$, gdy dla każdego $A \in \mathcal{I}$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $A \subseteq B$.

Mówimy, że nieprzeliczalna liczba kardynalna κ jest *quasi-mierzalna,* jeśli istnieje właściwy, ω_1-nasycony, κ-zupełny ideał na κ, zawierający wszystkie zbiory jednoelementowe.

Łatwo udowodnić następujące fakty.

Fakt 1.1.5. *Jeżeli istnieje σ-ideał pierwszy na X, zawierający wszystkie zbiory jednoelementowe, to istnieje dwuwartościowa miara uniwersalna na X.*

Fakt 1.1.6. *Jeżeli istnieje właściwy, ω_1-nasycony σ-ideał na X, zawierający wszystkie zbiory jednoelementowe, to istnieje quasi-mierzalna liczba kardynalna $\leqslant |X|$.*

Niech $A, B \subseteq X$. Mówimy, że A, B *są równe modulo* $\mathcal{I}$ (*są $\mathcal{I}$-prawie równe*) (co zapisujemy $A =_{\mathcal{I}} B$), jeżeli różnica symetryczna $A \vartriangle B \in \mathcal{I}$. Ponadto, jeżeli $f, g \colon X \to Y$, to piszemy $f =_{\mathcal{I}} g$, gdy $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{I}$.

Mówimy, że własność $\phi(x)$ zachodzi dla *$\mathcal{I}$-prawie wszystkich* $x \in X$, gdy $\{x \in X : \neg\phi(x)\} \in \mathcal{I}$. Jeżeli wiadomo o jakim ideale jest mowa, to piszemy po prostu: *dla prawie wszystkich x.*

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem podzbiorów X. Definiujemy następujące niezmienniki kardynalne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{add}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \wedge \textstyle\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}\}, \\
\mathrm{cov}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \wedge \textstyle\bigcup \mathcal{F} = X\}, \\
\mathrm{non}(\mathcal{I}) &= \min\{|A| : A \subseteq X \wedge A \notin \mathcal{I}\}, \\
\mathrm{non}^*(\mathcal{I}) &= \min\{\kappa : \forall(A \notin \mathcal{I})\exists(B \notin \mathcal{I})(B \subseteq A \wedge |B| \leqslant \kappa)\}.
\end{aligned}$$

W Rozdziale 6 wykorzystamy jeszcze jedno twierdzenie dotyczące liczb mierzalnych (patrz np. [Fre93]).

Twierdzenie 1.1.7. *Jeżeli istnieje rzeczywiście mierzalna liczba kardynalna, to* $\mathrm{non}(\mathcal{N}(m)) = \omega_1$. *W szczególności, jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy, że nie istnieją rzeczywiście mierzalne liczby kardynalne mniejsze bądź równe* $\mathrm{non}(\mathcal{N}(m))$.

c.c.c.

Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów X, a $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ – σ-ideałem na X. Mówimy, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ spełnia *c.c.c*, jeśli każda rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ zbiorów parami rozłącznych jest przeliczalna.

Podzbiory grupy

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów grupy G, $A, B \subseteq G$ oraz $g \in G$. Wówczas używamy następujących oznaczeń: $-A = \{-a : a \in A\}, A + g = \{a + g : a \in A\}, A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$ oraz $-\mathcal{A} = \{-A : A \in \mathcal{A}\}$. Zbiór $A + B$ nazywamy *sumą algebraiczną* zbiorów A i B.

Ponadto mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest:

- *niezmiennicza na przesunięcia* (lub po prostu *niezmiennicza*), gdy $\mathcal{A} + g \subseteq \mathcal{A}$ dla każdego $g \in G$;
- *niezmiennicza na odbicia* (lub po prostu *symetryczna*), gdy $-\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.

Zbiór $A \subseteq G$ jest *$\mathcal{I}$-prawie niezmienniczy,* jeśli $(A + g) \triangle A \in \mathcal{I}$ dla każdego $g \in G$. Mówimy, że zbiór A jest *prawie niezmienniczy,* gdy jest $\mathcal{I}$-prawie niezmienniczy dla ideału $\mathcal{I} = \{X \subseteq G : |X| < |G|\}$.

Zbiory borelowskie

Poniższe definicje i twierdzenia można znaleźć np. w [Kec95]. Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi.

Rodzina zbiorów *borelowskich* jest to najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte.

Rodziny Σ^0_α i Π^0_α definiujemy indukcyjnie. Rodzina Σ^0_1 składa się ze wszystkich zbiorów otwartych w X, a Π^0_1 - ze wszystkich zbiorów domkniętych. Następnie

$$\Sigma^0_\alpha = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \Pi^0_{\alpha_n} \text{ dla } \alpha_n < \alpha\},$$

$$\Pi^0_\alpha = \{X \setminus A : A \in \Sigma^0_\alpha\}.$$

Zbiory analityczne są to ciągłe obrazy zbiorów borelowskich. Zbiory koanalityczne są to dopełnienia zbiorów analitycznych.

Funkcja $f : X \to Y$ jest *borelowska,* jeżeli $f^{-1}(U)$ jest zbiorem borelowskim dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq Y$.

Funkcja $f : X \to Y$ jest *klasy α Baire'a,* gdy $f^{-1}(U) \in \Sigma^0_{\alpha+1}$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq Y$.

Bijekcję $f : X \to Y$ nazywamy *izomorfizmem borelowskim,* jeżeli f i f^{-1} są borelowskie.

Twierdzenie 1.1.8. *Jeżeli $A \subseteq X, B \subseteq Y$ są nieprzeliczalnymi zbiorami borelowskimi, to istnieje izomorfizm borelowski $f : A \to B$.*

Twierdzenie 1.1.9. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją borelowską. Jeżeli $A \subseteq X$ jest zbiorem borelowskim oraz $f \restriction A$ jest funkcją różnowartościową, to $f(A)$ jest zbiorem borelowskim oraz $f \restriction A : A \to f(A)$ jest izomorfizmem borelowskim.*

Twierdzenie 1.1.10. *Niech $A \subseteq X$ będzie nieprzeliczalnym zbiorem borelowskim. Wówczas dla każdego $\alpha < \omega_1$ istnieje zbiór borelowski $B \subseteq A$ taki, że $B \notin \Sigma^0_\alpha$.*

Liniowa niezależność

W całej pracy przez *zbiór liniowo niezależny* rozumiemy zbiór liniowo niezależny nad ciałem liczb wymiernych (o ile nie zostanie powiedziane inaczej). Dowolną bazę przestrzeni $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) nad ciałem liczb wymiernych nazywamy *bazą Hamela.* Przez $lin(A)$ oznaczamy przestrzeń liniową (nad $\mathbb{Q}$) generowaną przez zbiór A.

Liniowo niezależne zbiory doskonałe

W pracy tej będziemy korzystali z następującego twierdzenia, które pozwala znajdować liniowo niezależne zbiory doskonałe.

Twierdzenie 1.1.11 (Mycielski [Myc64])**.** *Niech X będzie przestrzenią polską w sobie gęstą. Niech $\mathcal{R} = \{R_i : i \in \omega\}$ będzie zbiorem relacji na X, tzn. dla każdego $i \in \omega$ mamy $R_i \subseteq X^{k_i}$ dla pewnego $k_i \geqslant 1$. Jeżeli każdy R_i jest zbiorem pierwszej kategorii w X^{k_i}, to istnieje zbiór doskonały $P \subseteq X$ taki, że $(x_1, \ldots, x_{k_i}) \notin R_i$ dla parami różnych $x_1, \ldots, x_{k_i} \in P$.*

Uwaga. Wynik Mycielskiego [Myc64] mówi dużo więcej niż Twierdzenie 1.1.11. Łatwy dowód Twierdzenia 1.1.11 można znaleźć np. w [Wag93].

Nietrudno sprawdzić, że poniższe uogólnienie Twierdzenia 1.1.11 jest również prawdziwe.

Twierdzenie 1.1.12. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to w Twierdzeniu 1.1.11 możemy przyjąć, że* $|\mathcal{R}| < \mathfrak{c}$.

Poniższe twierdzenia, z których będziemy korzystali w dalszej części pracy, są wnioskami z Twierdzenia 1.1.11.

Twierdzenie 1.1.13. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq \mathbb{R}^n$, który jest liniowo niezależny.*

Twierdzenie 1.1.14. *Dla dowolnych zbiorów pierwszej kategorii $A, B \subseteq \mathbb{R}$ istnieje liniowo niezależny zbiór doskonały P taki, że $(P - P) \cap A \subseteq \{0\}$ oraz $P \cap B = \emptyset$.*

Twierdzenie 1.1.15. *Jeżeli $P \subseteq \mathbb{R}^n$ jest liniowo niezależnym zbiorem doskonałym, to istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $P \cup Q$ jest również liniowo niezależny.*

Jako wniosek z ostatniego twierdzenia otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1.16. *Niech $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie liniowo niezależnym zbiorem doskonałym. Jeżeli G jest grupą (przestrzenią liniową) generowaną przez P, to $|\{G + t : t \in \mathbb{R}^n\}| = \mathfrak{c}$.*

Uwaga. Twierdzenie 1.1.13 nie należy do Mycielskiego. Było ono oczywiście znane dużo wcześniej (patrz m.in. [vN28], [Jon42], [Kuc85]).

Fakt 1.1.17. *Jeżeli P jest liniowo niezależnym zbiorem doskonałym, to $q_1P + \cdots + q_nP$ jest zbiorem pierwszej kategorii dla dowolnych $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}, n \in \omega$.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że $q_1P + \cdots + q_nP$ jest zbiorem typu F_σ (jako ciągły obraz zbioru σ-zwartego). Gdyby $q_1P + \cdots + q_nP$ nie był pierwszej kategorii, to $(q_1P + \cdots + q_nP) - (q_1P + \cdots + q_nP)$ zawierałby otwarte otoczenie zera (na mocy Twierdzenia 2.1.4), czyli przestrzeń liniowa generowana przez P byłaby całą prostą. A to implikuje, że P byłby bazą Hamela, a wiadomo, że nie ma borelowskich baz Hamela (patrz np. [Kuc85]). □

Twierdzenie 1.1.18. *Istnieje baza Hamela, która jest sumą $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych nieprzeliczalnych zbiorów domkniętych.*

Dowód. Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie liniowo niezależnym zbiorem doskonałym. Niech $A \subseteq \mathbb{R} \setminus P$ będzie takim zbiorem, że $P \cup A$ jest bazą Hamela. Wówczas $|A| = \mathfrak{c}$. Niech $A = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Ponieważ P jest zbiorem doskonałym, więc możemy podzielić go na $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych zbiorów doskonałych. Niech $P = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} P_\alpha$, gdzie P_α są parami rozłącznymi zbiorami doskonałymi.

Widać, że
$$H = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha,$$
gdzie $Q_\alpha = P_\alpha \cup \{x_\alpha\}$, jest szukaną bazą Hamela. □

Twierdzenie Kuratowskiego-Ulama

Dla zbioru $A \subseteq X \times Y$ i dla $x \in X, y \in Y$ definiujemy *cięcie pionowe* zbioru A jako
$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$$
oraz *cięcie poziome* zbioru A jako
$$A^y = \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$
Podobnie definiujemy cięcia funkcji $f\colon X \times Y \to Z$. Piszemy f_x (odpowiednio f^y) dla oznaczenia funkcji z Y w Z (z X w Z) danej wzorem $f_x(y) = f(x, y)$ ($f^y(x) = f(x, y)$).

W pracy tej wielokrotnie skorzystamy ze znanego Twierdzenia Kuratowskiego-Ulama.

Twierdzenie 1.1.19. *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Załóżmy, że Y ma przeliczalną bazę. Niech $A \subseteq X \times Y$. Wówczas:*

1. *Jeżeli A jest zbiorem pierwszej kategorii, to $\mathcal{M}$-prawie wszystkie cięcia pionowe zbioru A są pierwszej kategorii.*

2. *Jeżeli zbiór A ma własność Baire'a, to $\mathcal{M}$-prawie wszystkie cięcia pionowe zbioru A mają własność Baire'a.*

3. *Jeżeli zbiór A ma własność Baire'a i $\mathcal{M}$-prawie wszystkie cięcia pionowe zbioru A są pierwszej kategorii, to zbiór A jest pierwszej kategorii.*

Rozdział 2

Pewne własności zbiorów mierzalnych

2.1 Mierzalność funkcji addytywnych

W rozdziale tym zakładamy, że funkcje są określone na grupie abelowej, o wartościach w $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{R}^n$).

Definicja 2.1.1. Niech G będzie grupą abelową (lub grupą topologiczną). Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów G oraz niech $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ będzie σ-ideałem na G. Mówimy, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma:

1. *własność Steinhausa* (SP), jeżeli $A - A$ zawiera otwarte otoczenie 0 dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$;
2. *własność Ostrowskiego* (OP), jeżeli każdy homomorfizm ograniczony na zbiorze z rodziny $\mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$ jest ciągły;
3. *słabą własność Ostrowskiego* (WOP), jeżeli każdy homomorfizm ograniczony na zbiorze z rodziny $\mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$ jest $\mathcal{A}$-mierzalny;
4. *własność Cauchy'ego* (CP), jeżeli każdy $\mathcal{A}$-mierzalny homomorfizm jest ciągły.

Uwaga. Definicje 1, 2, 4 pojawiły się w [KS76] w przypadku, gdy $\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów μ-mierzalnych, $\mathcal{J}$ jest ideałem zbiorów miary zero, gdzie μ jest miarą.

Na początek mamy dobrze znane twierdzenia, które wyjaśniają nazwy „własność Ostrowskiego" i „własność Steinhausa". Poniższe twierdzenia są dla miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.1.2 (Steinhaus [Ste20])**.** *Para $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ ma własność Steinhausa.*

Twierdzenie 2.1.3 (Ostrowski [Ost29])**.** *Para $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ ma własność Ostrowskiego.*

Kategoryjne odpowiedniki powyższych twierdzeń są również prawdziwe.

Twierdzenie 2.1.4 (Piccard [Pic39])**.** *Para $(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ ma własność Steinhausa.*

Twierdzenie 2.1.5 (Mehdi [Meh64])**.** *Para $(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ ma własność Ostrowskiego.*

Powyższe twierdzenia uogólniają się w następujący sposób (są to również dobrze znane fakty). Dowody poniższych twierdzeń można znaleźć m.in. w [CKW95, str. 173-174].

Twierdzenie 2.1.6. *Niech G będzie lokalnie zwartą grupą topologiczną i niech μ będzie lewostronnie niezmienniczą miarą Haara na G. Wówczas para $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ ma własność Steinhausa.*

Twierdzenie 2.1.7. *Niech G będzie grupą topologiczną. Wówczas para $(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ ma własność Steinhausa.*

Odpowiedniki powyższych twierdzeń dla zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego nie są prawdziwe, jak pokazują poniższe łatwe do udowodnienia twierdzenia.

Twierdzenie 2.1.8. *Para $((s), (s_0))$ nie ma własności Steinhausa.*

Dowód. Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie liniowo niezależnym zbiorem doskonałym. Zbiór P jest (s)-mierzalny, ale nie jest (s_0). Z drugiej strony wiemy, że $P+P$ nie zawiera żadnego zbioru otwartego (Fakt 1.1.17). □

Twierdzenie 2.1.9. *Para $((s), (s_0))$ nie ma własności Ostrowskiego.*

Dowód. Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie liniowo niezależnym zbiorem doskonałym. Wówczas istnieje funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = 1$ dla $x \in P$. Funkcja ta nie może być jednak funkcją ciągłą. □

Pomiędzy własnościami SP, OP, WOP, CP zachodzą pewne zależności, które są przedstawione w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1.10.

1. *Jeżeli para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma własność Ostrowskiego, to ma również słabą własność Ostrowskiego (o ile wszystkie zbiory otwarte są $\mathcal{A}$-mierzalne).*
2. *Jeżeli para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma własność Steinhausa, to ma również własność Ostrowskiego.*
3. *Jeżeli para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma własność Ostrowskiego, to ma również własność Cauchy'ego.*
4. *Jeżeli para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma słabą własność Ostrowskiego oraz własność Cauchy'ego, to ma również własność Ostrowskiego.*

Dowód. (OP $\Rightarrow$ WOP). Oczywiste.

(SP $\Rightarrow$ OP). Niech $f : G \to \mathbb{R}$ będzie funkcją addytywną ograniczoną na zbiorze $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$. Z własności Steinhausa i z addytywności funkcji f wynika, że f jest ograniczona na otoczeniu zera. A to już implikuje, że f jest ciągła w zerze (patrz m.in. [Lac02, str. 367]). Następnie używając addytywności f jeszcze raz otrzymamy, że f jest ciągła w każdym punkcie.

(OP $\Rightarrow$ CP). Niech $f : G \to \mathbb{R}$ będzie $\mathcal{A}$-mierzalnym homomorfizmem. Wówczas istnieje $n \in \omega$ takie, że $f^{-1}([-n, n]) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$.

(WOP+CP $\Rightarrow$ OP). Oczywiste. □

Okazuje się, że żadna z powyższych implikacji nie może być zastąpiona przez równoważność. Na przykład, jeżeli $\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów borelowskich, a $\mathcal{J}$ rodziną zbiorów przeliczalnych, to para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma własność Cauchy'ego, ale nie ma własności Ostrowskiego. Jeżeli $\mathcal{A}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów, a $\mathcal{J}$ rodziną zbiorów przeliczalnych, to para $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ma słabą własność Ostrowskiego, ale nie ma własności Ostrowskiego. Przykład pary z własnością Ostrowskiego, ale bez własności Steinhausa oraz inne ciekawe przykłady miar, mających tylko niektóre z powyższych własności, można znaleźć w [KS76].

Para $((s),(s_0))$ nie ma również słabej własności Ostrowskiego (a więc na mocy Twierdzenia 2.1.10 nie ma własności Ostrowskiego i własności Steinhausa – co zostało wcześniej pokazane).

Twierdzenie 2.1.11. *Para $((s),(s_0))$ nie ma słabej własności Ostrowskiego.*

Dowód. Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem doskonałym, który jest liniowo niezależny. Niech $B \subseteq P$ będzie zbiorem Bernsteina w P (tzn. B i $P \setminus B$ nie zawierają doskonałych podzbiorów zbioru P). Definiujemy funkcję $A_1\colon P \to \mathbb{R}$ wzorem $A_1(x) = 0$ dla $x \in B$ i $A_1(x) = 1$ dla $x \in P \setminus B$. Ponieważ P jest liniowo niezależny, więc możemy rozszerzyć A_1 do funkcji addytywnej $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $A \restriction P = A_1$. Widać, że funkcja A jest ograniczona na zbiorze $P \in (s) \setminus (s_0)$. Przypuśćmy, że A jest (s)-mierzalna. Wówczas na mocy Twierdzenia 1.1.1, istnieje zbiór doskonały $D \subseteq P$ taki, że $A \restriction D$ jest ciągła. Niech $x \in D \cap B$. Wówczas istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\omega}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $x_n \in D \setminus B$. Ale $A(x_n) = 1$ dla wszystkich n oraz $A(x) = 0$, więc $A \restriction D$ nie jest ciągła, sprzeczność. Tak więc A nie jest (s)-mierzalna. $\square$

Zanim przejdziemy do omówienia własności Cauchy'ego dla pary $((s),(s_0))$ zacytujemy twierdzenia, które są interesujące w kontekście rozważanych własności, jak i wyników Rozdziału 6.

Twierdzenie 2.1.12 (Kharazishvili [Kha56a])**.** *Istnieje niezmiennicze na przesunięcia i odbicia rozszerzenie miary Lebesgue'a, które nie ma własności Steinhausa.*

Twierdzenie 2.1.13 (Kuczma, Smítal [KS76, Example 2])**.** *Istnieje niezmiennicze na odbicia rozszerzenie miary Lebesgue'a, które nie ma słabej własności Ostrowskiego.*

Uwaga. Rozszerzenie skonstruowane w [KS76] nie jest zupełne i uzupełnienie tej miary może mieć słabą własność Ostrowskiego. Łatwo jednak zmienić definicję tej miary, aby otrzymać miarę zupełną bez słabej własności Ostrowskiego.

Wydaje się, że poniższy problem jest wciąż otwarty.

Problem. Czy istnieje niezmiennicze na przesunięcia rozszerzenie miary Lebesgue'a, które nie ma (słabej) własności Ostrowskiego (własności Cauchy'ego)?

2.1.1 Własność Cauchy'ego dla pary $((s),(s_0))$

Definicja 2.1.14. Zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ma *własność* (P), jeśli dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieją niezerowe liczby wymierne $a_1, \ldots, a_n$ takie, że

$$P \cap (a_1 H + \cdots + a_n H + t)$$

zawiera zbiór doskonały dla pewnego $t \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga. Zauważmy, że jeśli A jest dowolnym zbiorem, który ma własność (P), to każdy jego nadzbiór również ma własność (P).

Twierdzenie 2.1.15. *Jeżeli istnieje baza Hamela mająca własność (P), to para* $((s),(s_0))$ *nie ma własności Cauchy'ego.*

Dowód. Niech H będzie bazą Hamela mającą własność (P). Niech $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ będzie taką funkcją addytywną, że $f(x)=1$ dla $x\in H$. Oczywiście funkcja f jest nieciągła. Niech $P\subseteq\mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem doskonałym. Na mocy Twierdzenia 1.1.1 wystarczy znaleźć doskonały podzbiór $Q\subseteq P$ taki, że $f\restriction Q$ jest ciągła. Z własności (P) istnieje zbiór doskonały $Q\subseteq P$, niezerowe liczby wymierne $a_1,\ldots,a_n$ oraz $t\in\mathbb{R}^n$ takie, że

$$Q\subseteq a_1H+\cdots+a_nH+t.$$

Tak więc dowolny $x\in Q$ jest postaci $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+t$ dla pewnych $x_1,\ldots,x_n\in H$. Czyli

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_1x_1+\cdots+a_nx_n+t)\\ &= a_1f(x_1)+\cdots+a_nf(x_n)+f(t)\\ &= a_1+\cdots+a_n+f(t) \end{aligned}$$

co pokazuje, że f jest stała na zbiorze Q, więc $f\restriction Q$ jest ciągła. □

Wzmacniając nieznacznie własność (P) można udowodnić więcej, a mianowicie, że istnieje liniowy izomorfizm, który wraz z funkcją odwrotną jest (s)-mierzalny, ale nie jest ciągły.

Definicja 2.1.16. Zbiór $H\subseteq\mathbb{R}^n$ ma *własność* (R), jeśli dla dowolnego zbioru doskonałego $P\subseteq\mathbb{R}^n$ istnieją niezerowe liczby wymierne $a_1,\ldots,a_n$ oraz podzbiór doskonały $H_0\subseteq H$ takie, że

$$P\cap(a_1H_0+\cdots+a_nH_0+t)$$

zawiera zbiór doskonały dla pewnego $t\in\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Zauważmy, że jeśli A jest dowolnym zbiorem, który ma własność (R), to każdy jego nadzbiór również ma własność (R).

Twierdzenie 2.1.17. *Jeżeli istnieje baza Hamela mająca własność (R), to istnieje izomorfizm liniowy* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *taki, że* f *i* f^{-1} *są* (s)*-mierzalne i nieciągłe.*

Dowód. Niech $H\subseteq\mathbb{R}^n$ będzie bazą Hamela o własności (R). Niech $\phi:H\to H$ będzie bijekcją, która „zamienia miejscami" dwa punkty. Wówczas $\phi^{-1}=\phi$ oraz $\phi\restriction H_0$ jest funkcją borelowską dla zbiorów doskonałych $H_0\subseteq H$. Niech $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ będzie funkcją addytywną rozszerzającą ϕ tzn. $f\restriction H=\phi$. Wówczas f jest nieciągłym izomorfizmem $\mathbb{R}^n$ oraz $f=f^{-1}$. Wystarczy więc pokazać, że f jest mierzalna w sensie Marczewskiego.

Niech $P\subseteq\mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem doskonałym. Wówczas z własności (R) istnieją zbiory doskonałe $P_0\subseteq P$, $H_0\subseteq H$, niezerowe liczby wymierne $a_1,\ldots,a_k$ oraz $t\in\mathbb{R}^n$ takie, że

$$P_0\subseteq a_1H_0+\cdots+a_kH_0+t.$$

Pokażemy, że $f \restriction P_0$ jest funkcją borelowską. Niech $\ell : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ będzie dana wzorem:

$$\ell(z_1, \dots, z_k) = a_1 z_1 + \dots + a_k z_k + t$$

Ponieważ H_0 jest liniowo niezależny, a $P_0 \subseteq \ell[H_0^k]$ więc odwzorowanie ℓ można jednoznacznie odwrócić na zbiorze P_0. Niech $r : P_0 \to H_0^k$ będzie tą funkcją odwrotną. Ponieważ ℓ jest ciągła, więc r jest funkcją borelowską (Twierdzenie 1.1.9). Ponadto $(\underbrace{\phi \times \dots \times \phi}_{k-razy}) \restriction H_0^k$ jest funkcją borelowską, gdzie $(\underbrace{\phi \times \dots \times \phi}_{k-razy})(x_1, \dots, x_k) = (\phi(x_1), \dots, \phi(x_k))$. Tak więc złożenie $g = \ell' \circ (\underbrace{\phi \times \dots \times \phi}_{k-razy}) \circ r : P_0 \to \mathbb{R}^n$ jest również borelowsko mierzalne, gdzie $\ell' : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ jest zdefiniowana następująco

$$\ell'(x_1, \dots, x_k) = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + f(t).$$

Ale wówczas $g(x) = f(x)$ dla każdego $x \in P_0$, czyli $f \restriction P_0 = g$, co dowodzi, że $f \restriction P_0$ jest funkcją borelowską. $\square$

Poniżej pokażemy, że przy pewnych dodatkowych założeniach istnieją bazy Hamela o własności (R) (a więc i (P)).

Twierdzenie 2.1.18. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to istnieje baza Hamela o własności (R).*

Dowód. Niech $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów doskonałych w $\mathbb{R}^n$. Skonstruujemy ciąg $\{Q_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha$ będzie liniowo niezależnym zbiorem z własnością (R).

Załóżmy, że mamy już skonstruowane Q_β dla $\beta < \alpha$.

Dla każdego $k > 0$ niech L_k oznacza zbiór wszystkich funkcji $\ell : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ danych wzorem

$$\ell(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} q_i x_i,$$

gdzie $q_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ dla $i = 1, \dots, k$.

Dla każdego $p, q \in \omega, \beta_1, \dots, \beta_q < \alpha$ i $\ell \in L_{p+q}$ niech

$$R_{\ell,\beta_1,\dots,\beta_q} =$$

$$\{(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p : (\exists y_1 \in Q_{\beta_1} \dots, y_q \in Q_{\beta_q}) \ell(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0\}.$$

Niech $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę wszystkich takich relacji. Wówczas $|\mathcal{R}| < \mathfrak{c}$.

Możemy teraz wybrać Q_α. Rozważmy dwa przypadki.

1. Istnieje $R \in \mathcal{R}$ ($R \subseteq (\mathbb{R}^n)^p$) takie, że $R \cap (P_\alpha)^p \notin \mathcal{M}((P_\alpha)^p)$. W tym przypadku $Q_\alpha = \emptyset$.

2. W przeciwnym przypadku rodzina $\mathcal{R}$ składa się z relacji pierwszej kategorii na P_α. Korzystając z Twierdzenia 1.1.12 znajdziemy zbiór doskonały $Q \subseteq P_\alpha$ taki, że $(x_1, \dots, x_k) \notin R$ dla każdego $R \in \mathcal{R}$ oraz różnych $x_1, \dots, x_k \in Q$. W tym przypadku $Q_\alpha = Q$.

Łatwo sprawdzić (korzystając z definicji relacji $R_{\ell,\beta_1,\ldots,\beta_q}$), że $A = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Pokażemy teraz, że $A = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha$ ma własność (R). Co zakończy dowód, bo jak zauważyliśmy wcześniej, dowolna baza Hamela rozszerzająca A również będzie miała własność (R). Niech $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem doskonałym. Wówczas $P = P_\alpha$ dla pewnego $\alpha < \mathfrak{c}$. Jeśli $Q_\alpha \neq \emptyset$, to $Q_\alpha \subseteq (a_1 A_0 + t) \cap P$, gdzie $A_0 = Q_\alpha$, $a_1 = 1$ i $t = 0$.

W przeciwnym przypadku, $Q_\alpha = \emptyset$, czyli istnieją $p, q < \omega$, $\beta_1, \ldots, \beta_q < \alpha$ i $\ell \in L_{p+q}$ takie, że relacja $R = R_{\ell,\beta_1,\ldots,\beta_q} \cap P^p$ jest drugiej kategorii w P^p. Ponieważ jest to również zbiór z własnością Baire'a, więc na mocy Twierdzenia 1.1.19 istnieje $(z_2, \ldots, z_p) \in P^{p-1}$ takie, że $X = \{x \in P : (x, z_2, \ldots, z_p) \in R\} \in \mathcal{B}(P) \setminus \mathcal{M}(P)$. Tak więc istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq X$.

Niech $\ell(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = b_1 x_1 + \cdots + b_p x_p + c_1 y_1 + \cdots + c_q y_q$. Wówczas

$$Q \subseteq X \subseteq P \cap (a_1 A_0 + \cdots + a_q A_0 + t),$$

gdzie $a_1 = -c_1/b_1, \ldots, a_q = -c_q/b_1, t = -(b_2 z_2 + \cdots b_p z_p)/b_1, A_0 = Q_{\beta_1} \cup \cdots \cup Q_{\beta_q}$. □

Uwaga. Jak się później okazało Twierdzenie 2.1.18 zostało niezależnie udowodnione w pierwszej wersji pracy [MP00] (przy założeniu CH). Niestety twierdzenie to nie zostało zamieszczone w opublikowanej wersji tego artykułu. Ponadto w artykule [NW] autorzy zauważyli, że w pracy [MP00] można zastąpić CH przez $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

Z Twierdzeń 2.1.15, 2.1.17 oraz 2.1.18 otrzymujemy następujące wnioski.

Wniosek 2.1.19. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to para* $((s), (s_0))$ *nie ma własności Cauchy'ego.*

Wniosek 2.1.20. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to istnieje izomorfizm liniowy* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *taki, że* f *i* f^{-1} *są* (s)*-mierzalne i nieciągłe.*

Niestety pytanie, czy istnieją w ZFC bazy Hamela o własności (P), jest wciąż problemem otwartym. Również nie wiadomo, czy para $((s), (s_0))$ ma własność Cauchy'ego w ZFC.

Problem. Czy istnieje baza Hamela o własności (P) w ZFC?

Problem. Czy para $((s), (s_0))$ ma własność Cauchy'ego w ZFC?

W artukule [CS] autorzy dowodzą, że obraz dowolnego zbioru otwartego przez dowolny izomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a i bez własności Baire'a. Okazuje się, że obraz dowolnego zbioru otwartego przez taki izomorfizm może być mierzalny w sensie Marczewskiego.

Na początek musimy wzmocnić Twierdzenie 2.1.18.

Twierdzenie 2.1.21. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to istnieje rodzina* $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ *taka, że:*

1. $B_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ *są parami rozłącznymi nieprzeliczalnymi zbiorami borelowskimi,*

2. $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} B_\alpha$ *jest bazą Hamela,*

3. *dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieją niezerowe liczby wymierne $a_1, \ldots, a_n$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_n < \mathfrak{c}$ takie, że*

$$P \cap (a_1 B_{\beta_1} + \cdots + a_n B_{\beta_n} + t)$$

zawiera zbiór doskonały dla pewnego $t \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Z dowodu Twierdzenia 2.1.18 wynika, że istnieje rodzina $\{Q_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ taka, że

1. Q_α jest zbiorem doskonałym albo zbiorem pustym,
2. $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha$ jest liniowo niezależny,
3. dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieją niezerowe liczby wymierne $a_1, \ldots, a_n$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_n < \mathfrak{c}$ takie, że

$$P \cap (a_1 Q_{\beta_1} + \cdots + a_n Q_{\beta_n} + t)$$

zawiera zbiór doskonały dla pewnego $t \in \mathbb{R}^n$.

Po pierwsze zauważmy, że zbiór $\{\alpha : Q_\alpha \neq \emptyset\}$ jest mocy $\mathfrak{c}$. Wynika to z faktu, że wszystkie relacje $R_{\ell,\beta_1,\ldots,\beta_n}$ definiowane w dowodzie Twierdzenia 2.1.18 są pierwszej kategorii w $\mathbb{R}$, a więc również w każdym odcinku domkniętym. Ponieważ mamy $\mathfrak{c}$ parami różnych odcinków domkniętych, więc w czasie konstrukcji zbiorów Q_α w dowodzie Twierdzenia 2.1.18 przypadek 2 zajdzie $\mathfrak{c}$ razy, czyli konstruowany zbiór Q_α będzie zbiorem niepustym.

Możemy więc założyć, że wszystkie Q_α są zbiorami doskonałymi, zachowując własności jakie ta rodzina posiada.

Musimy jeszcze uzupełnić naszą rodzinę do bazy Hamela, dbając o to, żeby otrzymane zbiory były nadal borelowskie. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie taki, że $A \cup \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha$ jest bazą Hamela. Wówczas $|A| = \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. Niech $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Wówczas

$$\{Q_\alpha \cup \{x_\alpha\} : \alpha < \kappa\} \cup \{Q_\alpha : \kappa \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$$

jest szukaną rodziną. □

Twierdzenie 2.1.22. *Jeżeli* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, *to istnieje izomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taki, że f i f^{-1} są (s)-mierzalne (czyli obraz dowolnego zbioru otwartego przez f jest (s)-mierzalny).*

Dowód. Niech $\{B_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie rodziną z poprzedniego twierdzenia dla przestrzeni $\mathbb{R}^2$, a $\{K_\alpha \subseteq \mathbb{R} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ dla przestrzeni $\mathbb{R}$.

Dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ niech $\phi_\alpha : B_\alpha \to K_\alpha$ będzie borelowskim izomorfizmem (Twierdzenie 1.1.8).

Ponieważ $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} B_\alpha$ i $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} K_\alpha$ są bazami Hamela, odpowiednio w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$, więc istnieje izomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taki, że $f \restriction B_\alpha = \phi_\alpha$ dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$.

Mierzalność w sensie Marczewskiego funkcji f i f^{-1} pokazuje się podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1.17. □

2.2 Sumy algebraiczne

Niech G będzie grupą abelową. Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów grupy G, a $\mathcal{I}$ niech będzie σ-ideałem takim, że $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$.

Gdy jest mowa o sumach algebraicznych zbiorów należących do $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{I}$, to w naturalny sposób pojawiają się następujące pytania.

Pytanie Q1. Czy istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{I}$ takie, że $A + B \notin \mathcal{I}$?

Pytanie Q2. Czy istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{A}$ takie, że $A + B \notin \mathcal{A}$?

Pytanie Q3. Czy istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{I}$ takie, że $A + B \notin \mathcal{A}$?

Oczywiście pozytywna odpowiedź na Pytanie Q3 daje pozytywną odpowiedź na pozostałe pytania.

W tym paragrafie odpowiemy na powyższe pytania dla pary $((s), (s_0))$.

2.2.1 Co wiadomo o sumach algebraicznych zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i z własnością Baire'a?

Po pierwsze, wiadomo, że odpowiedź na Pytanie Q1 jest pozytywna (tak dla miary, jak i kategorii). Wystarczy wziąć zbiór Cantora.

Następujące twierdzenie pomaga odpowiedzieć na Pytanie Q1 dla różnych ideałów.

Twierdzenie 2.2.1 (Kharazishvili [Kha56b])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolnym niezmienniczym σ-ideałem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

1. *istnieją zbiory $X \in \mathcal{I}$ i $Y \in \mathcal{I}$ takie, że $X + Y \notin \mathcal{I}$;*
2. *istnieje zbiór $X \in \mathcal{I}$ taki, że $X + X \notin \mathcal{I}$;*
3. *istnieje liniowo niezależny zbiór $X \in \mathcal{I}$ taki, że $lin(X) \notin \mathcal{I}$;*
4. *istnieje zbiór $X \in \mathcal{I}$ taki, że $lin(X) \notin \mathcal{I}$.*

Sierpiński [Sie20] udowodnił, że odpowiedź na Pytanie Q2 jest pozytywna dla miary Lebesgue'a.

Twierdzenie 2.2.2 (Sierpiński [Sie20])**.** *Istnieją zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a A, B takie, że $A + B$ nie jest mierzalny.*

Analogiczne twierdzenie dla zbiorów z własnością Baire'a jest również prawdziwe (patrz np. [Kuc85]).

Poniższe twierdzenie pomaga odpowiedzieć na Pytanie Q3 dla różnych ciał i ideałów.

Twierdzenie 2.2.3 (Kharazishvili [Kha56b])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie niezmienniczym σ-ideałem podzbiorów $\mathbb{R}$, a $\mathcal{A}$ niech będzie niezmienniczym σ-ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$, zawierającym $\mathcal{I}$ i takim, że $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ spełnia c.c.c. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

1. *istnieją zbiory* $X \in \mathcal{I}$ *i* $Y \in \mathcal{I}$ *takie, że* $X + Y \notin \mathcal{I}$;

2. *istnieje zbiór* $X \in \mathcal{I}$ *taki, że* $X + X \notin \mathcal{A}$;

3. *istnieje liniowo niezależny zbiór* $X \in \mathcal{I}$ *taki, że* $lin(X) \notin \mathcal{A}$;

4. *istnieje zbiór* $X \in \mathcal{I}$ *taki, że* $lin(X) \notin \mathcal{A}$.

Cichoń i Jasiński [CJ03] udowodnili ostatnio twierdzenie, które również pomaga odpowiedzieć na Pytanie Q3. Zaletą tego twierdzenia jest brak założenia, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ spełnia c.c.c. Niestety twierdzenie to ma również wady, które nie pozwalają na jego użycie dla zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego (jak zostanie później pokazane).

Twierdzenie 2.2.4. *Niech* $\mathcal{I}$ *będzie niezmienniczym* σ*-ideałem podzbiorów* $\mathbb{R}$ *z bazą złożoną ze zbiorów koanalitycznych. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

1. *istnieją zbiory* $X, Y \in \mathcal{I}$ *takie, że* $X + Y \notin \mathcal{I}$;

2. *istnieją zbiory* $X, Y \in \mathcal{I}$ *takie, że* $X + Y \notin Borel[\mathcal{I}]$.

W powyższy twierdzeniu $Borel[\mathcal{I}]$ oznacza σ-ciało generowane przez rodzinę zbiorów borelowskich i zbiorów z ideału $\mathcal{I}$.

2.2.2 Duże sumy małych zbiorów

Twierdzenie 2.2.5. *Istnieje zbiór* $X \in (s_0)$ *taki, że* $X + X \notin (s_0)$.

Dowód. Wystarczy wziąć bazę Hamela, która jest zbiorem (s_0) (istnienie takiej bazy zostało pokazane przez Millera i Popvassileva [MP00]) i zastosować Twierdzenie 2.2.1. □

Uwaga. Nowik [Now00] pokazał, że istnieje zbiór $X \subseteq 2^\omega$ taki, że $X \in (s_0)$, ale $X + X = 2^\omega$, czyli $X + X \notin (s_0)$.

2.2.3 Dowody dla miary i kategorii nie działają dla zbiorów Marczewskiego

W paragrafie tym uzasadnimy, dlaczego różne dowody pokazujące, że odpowiedź na Pytania Q2 i Q3 jest pozytywna dla miary i kategorii, nie działają dla zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego.

Dowód Sierpińskiego. Dowód ten opiera się na twierdzeniu mówiącym, że jeżeli A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a o dodatniej mierze, to istnieje liczba wymierna $q \neq 0$ taka, że $q \in A - A$ (jest to łatwy wniosek z własności Steinhausa dla zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a). Zbiory mierzalne w sensie Marczewskiego nie mają własności Steinhausa (jak to zostało pokazane w Twierdzeniu 2.1.8), ponadto rodzina ta nie ma nawet tej słabszej własności. Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie liniowo niezależnym zbiorem doskonałym. W zbiorze tym jest tylko przeliczalnie wiele elementów, które generują liczby wymierne. Niech $A \subseteq P$ będzie zbiorem tych elementów. Wówczas zbiór $P \setminus A \in (s) \setminus (s_0)$, a jego różnica algebraiczna z samym sobą nie zawiera niezerowej liczby wymiernej.

Dowód Kurepy. Kurepa [Kur56] przedstawił inny dowód wyniku Sierpińskiego. Jego dowód opiera się na twierdzeniu, które mówi, że rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma własność Ostrowskiego. Niestety dla zbiorów (s)-mierzalnych ten fakt jest nieprawdziwy. Szczegóły dotyczące przykładu pokazującego, że rodzina (s) nie ma własności Ostrowskiego znajdują się w Paragrafie 2.1.

Dowód Twierdzenia 2.2.3. W Twierdzeniu 2.2.3 jest założenie, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ spełnia c.c.c. Niestety para $((s), (s_0))$ nie spełnia c.c.c. Żeby się o tym przekonać wystarczy podzielić dowolny zbiór doskonały na $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych zbiorów doskonałych.

Dowód Twierdzenia 2.2.4 W Twierdzeniu 2.2.4 nie ma już założenia o c.c.c., ale jest założenie o postaci σ-ciała. Mianowicie, twierdzenie to jest prawdziwe dla σ-ciał postaci $Borel[(s_0)]$. Niestety rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego nie jest takiej postaci.

Twierdzenie 2.2.6 (folklor). *$(s) \neq Borel[(s_0)]$ tzn. istnieje zbiór (s)-mierzalny, który nie jest różnicą symetryczną żadnego zbioru borelowskiego i zbioru (s_0).*

Dowód. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym zbiorem (s_0) takim, że $|A| = \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{S} = \{B \times \mathbb{R} : B \subseteq A, B \neq \emptyset\}$. Wówczas $\mathcal{S} \subseteq (s) \setminus (s_0)$ i $|\mathcal{S}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Łatwo sprawdzić, że $B \Delta C \notin (s_0)$ dla dowolnych $B, C \in \mathcal{S}(B \neq C)$. Z drugiej strony, istnieje tylko $\mathfrak{c}$ zbiorów borelowskich. Czyli istnieje $B \subseteq A$ taki, że $B \times \mathbb{R}$ jest szukanym zbiorem. Korzystając z izomorfizmu borelowskiego między $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^n$ znajdujemy taki zbiór w $\mathbb{R}^n$ dla każdego $n \geqslant 1$. $\square$

W Twierdzeniu 2.2.4 jest ponadto założenie o tym, że σ-ideał $\mathcal{I}$ ma koanalityczną bazę. Okazuje się, że rodzina zbiorów (s_0) nie ma takiej bazy jak pokazuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.7 (folklor). *σ-ideał zbiorów (s_0) nie ma bazy koanalitycznej.*

Dowód. Niech $\{E_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie rodziną wszystkich koanalitycznych zbiorów z (s_0). Niech P_α dla $\alpha < \mathfrak{c}$ będą zbiorami doskonałymi, które są parami rozłączne oraz $P_\alpha \cap E_\alpha = \emptyset$. Zbiory P_α można wybrać, bo $E_\alpha \in (s_0)$ dla każdego α.

Niech $\{Q_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów doskonałych Q takich, że $|Q \cap P_\alpha| \leqslant \omega$ dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$.

Wybieramy teraz punkty x_α dla $\alpha < \mathfrak{c}$ tak, żeby:

1. $x_\alpha \in P_\alpha$,

2. $x_\alpha \notin Q_\beta$ dla wszystkich $\beta < \alpha$.

Zauważmy, że wybór punktów x_α zawsze jest możliwy, ponieważ $Q_\beta \cap P_\alpha$ jest zbiorem przeliczalnym dla $\beta < \alpha$. Niech $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Nietrudno sprawdzić, że $X \in (s_0)$ oraz nie jest zawarty w żadnym zbiorze E_α. $\square$

Uwaga. Łatwo zauważyć, że w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z faktu, że zbiory E_α są koanalityczne. Ważne było tylko to, że jest $\mathfrak{c}$ takich zbiorów. Czyli ideał (s_0) nie ma żadnej bazy mocy $\mathfrak{c}$.

2.2.4 Niemierzalne sumy zbiorów mierzalnych

Pomimo, że dowody dla miary i kategorii nie są dobre dla zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego, pokażemy poniżej, że odpowiedzi na Pytania Q2 i Q3 są dla nich pozytywne.

Po pierwsze pokażemy (Twierdzenie 2.2.8), że istnieje prawie niezmienniczy zbiór, który jest zbiorem (s_0) mocy $\mathfrak{c}$. Następnie korzystając z tego wyniku pokażemy (Twierdzenie 2.2.12), że istnieje zbiór $A \in (s_0)$ taki, że $A + A$ nie jest mierzalny w sensie Marczewskiego (tzn. odpowiedź na Pytanie Q3 dla zbiorów (s)-mierzalnych jest pozytywna).

Twierdzenie 2.2.8. *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $A \in (s_0)$, $|A| = \mathfrak{c}$ oraz $|(A + h) \setminus A| < \mathfrak{c}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$.*

Dowód. Niech P będzie liniowo niezależnym podzbiorem doskonałym $\mathbb{R}^n$ oraz niech G będzie grupą generowaną przez P. Niech $\mathcal{K}$ oznacza rodziną składającą się z dwóch rodzajów podzbiorów doskonałych $\mathbb{R}^n$. Zbiór $A \in \mathcal{K}$, jeżeli $(G+t) \cap P$ jest przeliczalny dla każdego $t \in \mathbb{R}^n$ albo $P \subseteq G + t$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}^n$.

Wykorzystamy kilka łatwych do sprawdzenia własności rodziny $\mathcal{K}$.

Fakt 2.2.9. *1. Rodzina $\mathcal{K}$ jest niezmiennicza na przesunięcia.*

2. Mniej niż $\mathfrak{c}$ zbiorów z $\mathcal{K}$ nie pokrywa $\mathbb{R}^n$ (wynika to m.in. z Twierdzenia 1.1.16).

3. Każdy nieprzeliczalny zbiór borelowski ma podzbiór należący do $\mathcal{K}$.

Niech $\mathcal{K} = \{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ oraz $\mathbb{R}^n = \{h_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Ponadto niech G_α oznacza grupę generowaną przez zbiór $\{h_\beta : \beta < \alpha\}$.

Skonstruujemy dwa ciągi: $\{Q_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ o następujących własnościach:

A1 $x_\alpha \neq x_\beta$ dla $\alpha \neq \beta$,

A2 $Q_\alpha \in \mathcal{K}$,

A3 $Q_\alpha \subseteq P_\alpha$ dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$,

A4 $(\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta + x_\beta) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta = \emptyset$.

Załóżmy, że mamy już skonstruowane Q_β i x_β dla $\beta < \alpha$.

Po pierwsze pokażemy, że możemy znaleźć $x_\alpha \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$(G_\alpha + x_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta \cup P_\alpha \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}) = \emptyset.$$

Przypuśćmy, że nie jest to możliwe, tzn. dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$(G_\alpha + x) \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta \cup P_\alpha \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}) \neq \emptyset.$$

Wówczas

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{g\in G_\alpha} \Big((\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta \cup P_\alpha \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}) - g\Big) = \bigcup \mathcal{F},$$

gdzie

$$\mathcal{F} = \{Q_\beta - g : \beta < \alpha, g \in G_\alpha\} \cup \{P_\alpha - g : g \in G_\alpha\}$$
$$\cup \{x_\beta - g : \beta < \alpha, g \in G_\alpha\}.$$

Ale $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ (rodzina $\mathcal{K}$ jest niezmiennicza) i $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, bo mniej niż $\mathfrak{c}$ zbiorów z $\mathcal{K}$ nie może pokryć $\mathbb{R}^n$.

Teraz pokażemy, że istnieje $Q_\alpha \in \mathcal{K}$ takie, że $Q_\alpha \subseteq P_\alpha$ oraz

$$Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} (G_\beta + x_\beta) = \emptyset.$$

Ponieważ P_α jest zbiorem doskonałym, więc może być rozbity na $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych zbiorów doskonałych, tzn. $P_\alpha = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$, gdzie A_α są parami rozłączne i doskonałe. Ale $\bigcup_{\beta \leqslant \alpha} (G_\beta + x_\beta)$ ma moc mniejszą od $\mathfrak{c}$, więc istnieje α_0 takie, że $A_{\alpha_0} \cap \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} (G_\beta + x_\beta) = \emptyset$. Ale wiemy, że istnieje zbiór doskonały $Q \in \mathcal{K}$ taki, że $Q \subseteq A_{\alpha_0}$. Definiujemy $Q_\alpha = Q$. Łatwo sprawdzić, że tak wybrane Q_α, x_α spełniają A1–A4.

Niech

$$A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} (G_\alpha + x_\alpha).$$

Pokażemy, że zbiór A jest poszukiwanym zbiorem, tzn. $|A| = \mathfrak{c}$, $A \in (s_0)$ i $|(A + h) \setminus A| < \mathfrak{c}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$.

Ponieważ x_α są parami różne, a $x_\alpha \in G_\alpha + x_\alpha$, więc $|A| = \mathfrak{c}$.

Dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ takie, że $Q_\alpha \subseteq P_\alpha \subseteq P$. Pokażemy, że $Q_\alpha \cap A = \emptyset$.

Niech $\beta < \mathfrak{c}$. Niech $\delta = \max\{\alpha, \beta\} + 1$. Na mocy A4

$$(\bigcup_{\gamma < \delta} G_\gamma + x_\gamma) \cap \bigcup_{\gamma < \delta} Q_\gamma = \emptyset,$$

więc również $(G_\beta + x_\beta) \cap Q_\alpha = \emptyset$. Ale powyższe jest prawdziwe dla dowolnego $\beta < \mathfrak{c}$, więc $Q_\alpha \cap A = \emptyset$, a to pokazuje, że $A \in (s_0)$.

Pozostało do pokazania, że dla każdego $h \in \mathbb{R}$ mamy $|(A + h) \setminus A| < \mathfrak{c}$. Niech $h \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $\beta < \mathfrak{c}$ takie, że $h = h_\beta$. Ponieważ $h_\beta \in G_\alpha$ dla dowolnego $\alpha > \beta$, więc

$$(A + h) \setminus A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} ((G_\alpha + x_\alpha) + h_\beta) \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} (G_\alpha + x_\alpha) =$$

$$(\bigcup_{\alpha \leqslant \beta} ((G_\alpha + x_\alpha) + h_\beta) \cup \bigcup_{\alpha > \beta} (G_\alpha + x_\alpha)) \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} (G_\alpha + x_\alpha) \subseteq$$

$$\bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (G_\alpha + x_\alpha + h_\beta),$$

ale ostatni zbiór ma moc mniejszą od $\mathfrak{c}$ (więc należy do (s_0)). □

Wniosek 2.2.10. *Istnieje zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A \in (s_0)$, $|B| = \mathfrak{c}$, $B = -B$ oraz $|(B + h) \setminus B| < \mathfrak{c}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem z Twierdzenia 2.2.8. Wówczas $B = A \cup (-A)$ jest szukanym zbiorem. $\square$

Żeby udowodnić główne twierdzenie tego paragrafu będziemy potrzebowali następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.2.11 (Ciesielski–Fejzić–Freiling [CFF02])**.** *Niech A będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}$ takim, że $|(A+h) \cap (-A)| = \mathfrak{c}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje podzbiór $B \subseteq A$ taki, że $B + B$ jest zbiorem Bernsteina.*

Ponieważ żaden zbiór Bernsteina nie jest (s)-mierzalny, więc następujące twierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z dwóch ostatnich wyników.

Twierdzenie 2.2.12. *Istnieje zbiór $A \in (s_0)$ taki, że $A + A$ nie jest (s)-mierzalny.*

Uwaga. Twierdzenie 2.2.12 zostało niezależnie udowodnione również przez Kysiaka [Kys].

Rozdział 3

Funkcje z własnością Baire'a

3.1 Własność różnicy

Poniżej udowodnimy, że jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy. Udowodnimy mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.1. *Jeżeli* $\mathrm{non}^*(\mathcal{M}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, *to rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy.*

A jako wniosek otrzymamy rozwiązanie problemu Laczkovicha [Lac02].

Twierdzenie 3.1.2. *Własność różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a jest niesprzeczna z ZFC.*

Uwaga. Twierdzenie 3.1.2 zostało później udowodnione niezależnie przez Mátraia w pracy [Mát03].

W dowodach powyższych twierdzeń wykorzystamy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.3 (Recław [Rec])**.** *Rodzina funkcji z własnością Baire'a ma podwójną własność różnicy.*

Twierdzenie 3.1.4 (Recław, Zakrzewski [RZ99])**.** *Jeżeli* $\mathrm{non}^*(\mathcal{M}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, *to dla każdego* $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *takiego, że wszystkie jego cięcia poziome i pionowe mają własność Baire'a, istnieje zbiór* $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *z własnością Baire'a taki, że* $D_x =_{\mathcal{M}} B_x$ *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy przez $S_{\mathcal{M}}$ zdanie:

Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ taki, że $A \notin \mathcal{M}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus A \notin \mathcal{M}$ i $(A + (h,k)) \setminus A \in \mathcal{M}$ dla wszystkich $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.1.5 (Laczkovich [Lac99])**.** *Jeżeli* $S_{\mathcal{M}}$ *jest prawdziwe, to* $\mathrm{non}^*(\mathcal{M}) \geqslant \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Wykorzystamy również poniższy prosty fakt.

Fakt 3.1.6. *Jeżeli funkcja* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ma własność Baire'a, to również funkcja* $G\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana wzorem* $G(x,y) = g(x+y)$ *ma własność Baire'a (jako funkcja dwóch zmiennych).*

Dla funkcji $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz dla $(h,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ niech $\Delta_{(h,k)}F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$\Delta_{(h,k)}F(x,y)=F(x+h,y+k)-F(x,y).$$

Lemat 3.1.7. *Jeżeli $\Delta_h f$ ma własność Baire'a dla każdego $h\in\mathbb{R}$, to funkcja $\Delta_{(h,k)}Df$ ma własność Baire'a dla każdego $(h,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $(h,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\Delta_{(h,k)}Df(x,y)&=Df(x+h,y+k)-Df(x,y)\\ &=[f(x+y+h+k)-f(x+h)-f(y+k)]-[f(x+y)-f(x)-f(y)]\\ &=[f(x+y+h+k)-f(x+y)]-[f(x+h)-f(x)]-[f(y+k)-f(y)]\\ &=\Delta_{h+k}f(x+y)-\Delta_h f(x)-\Delta_k f(y).\end{aligned}$$

Dwie ostatnie funkcje mają własność Baire'a jako funkcje jednej zmiennej, więc mają również własność Baire'a jako funkcje dwóch zmiennych. Ponadto z Faktu 3.1.6 wynika, że pierwsza funkcja ma własność Baire'a. Ostatecznie funkcja $\Delta_{(h,k)}Df$ ma własność Baire'a. □

Lemat 3.1.8. *Niech $F\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że wszystkie jej cięcia pionowe i poziome mają własność Baire'a. Jeśli* $\mathrm{non}^*(\mathcal{M})<\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, *to istnieje funkcja $G\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ z własnością Baire'a taka, że $F_x=_{\mathcal{M}}G_x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że wystarczy udowodnić lemat dla funkcji nieujemnych. Niech więc funkcja F będzie jak w lemacie oraz $F(x,y)\geqslant 0$. Definiujemy teraz ciąg funkcji $F_n\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem:

$$F_n(x,y)=\begin{cases}\frac{m}{2^n} & \text{jeżeli } \frac{m}{2^n}\leqslant F(x,y)<\frac{m+1}{2^n} \text{ dla } m=0,1,\dots,n2^n-1,\\ n & \text{jeżeli } F(x,y)\geqslant n.\end{cases}$$

Wówczas

$$F_n(x,y)=\Sigma_{m=0}^{n2^n-1}\frac{m}{2^n}\chi_{A_{m,n}}(x,y)+n\chi_{A_n}(x,y),$$

gdzie $A_{m,n}=F^{-1}([\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}))$ i $A_n=F^{-1}([n,+\infty))$. Łatwo sprawdzić, że ciąg $\{F_n\}_{n\in\omega}$ jest punktowo zbieżny do funkcji F.

Wszystkie cięcia (pionowe i poziome) zbiorów $A_{n,m},A_n$ mają własność Baire'a. Rzeczywiście, $(A_{m,n})_x=(F_x)^{-1}([\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}))$ i funkcja F_x ma własność Baire'a dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Analogicznie pokazujemy dla cięć poziomych oraz zbiorów A_n.

Stosując teraz Twierdzenie 3.1.4 możemy znaleźć zbiory $B_{m,n},B_n$ z własnością Baire'a takie, że $(B_{m,n})_x=_{\mathcal{M}}(A_{m,n})_x$ i $(B_n)_x=_{\mathcal{M}}(A_n)_x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

Niech

$$C=\bigcup_n\bigcup\{B_{m,n}\cap B_{k,n}:m\neq k,m,k=0,1,\dots,n2^n-1\}$$

$$\cup\bigcup_n\bigcup\{B_n\cap B_{m,n}:m=0,1,\dots,n2^n-1\}.$$

Łatwo sprawdzić, że zbiory $B_{m,n}\cap B_{k,n}$ i $B_n\cap B_{m,n}$ są pierwszej kategorii. Przypuśćmy, że istnieją $n,m,k,m\neq k$ takie, że $B_{m,n}\cap B_{k,n}\notin\mathcal{M}$ (przypadek zbiorów

B_n i $B_{m,n}$ robi się analogicznie). Ponieważ zbiory $B_{m,n}, B_{k,n}$ mają własność Baire'a, więc na mocy Twierdzenia 1.1.19 istnieje zbiór $X \notin \mathcal{M}$ taki, że $(B_{m,n} \cap B_{k,n})_x \notin \mathcal{M}$ dla każdego $x \in X$. Z drugiej strony $(B_{m,n})_x =_{\mathcal{M}} (A_{m,n})_x$ i $(B_{k,n})_x =_{\mathcal{M}} (A_{k,n})_x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $(A_{m,n} \cap A_{k,n}) \notin \mathcal{M}$ dla każdego $x \in X$. Ponieważ $X \neq \emptyset$ więc $A_{m,n} \cap A_{k,n} \neq \emptyset$. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ na mocy definicji zbiorów $A_{m,n}$ mamy $A_{m,n} \cap A_{k,n} = \emptyset$.

Tak więc zbiór C jest pierwszej kategorii.

Definiujemy teraz następujące zbiory $D_{m,n} = B_{m,n} \setminus C$ oraz $D_n = B_n \setminus C$. Zbiory te mają własność Baire'a i dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $(D_{m,n})_x =_{\mathcal{M}} (A_{m,n})_x$ oraz $(D_n)_x =_{\mathcal{M}} (A_n)_x$. Wynika to z faktu, że prawie wszystkie cięcia pionowe zbioru C są pierwszej kategorii (na mocy Twierdzenia 1.1.19).

Teraz definiujemy ciąg funkcji $G_n \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$G_n(x,y) = \Sigma_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n} \chi_{D_{m,n}}(x,y) + n\chi_{D_n}(x,y).$$

Pokażemy teraz, że zbiór $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ \text{ciąg } \{G_n(x,y)\} \text{ jest zbieżny}\}$ jest rezydualny. Ponieważ funkcje G_n mają własność Baire'a, więc zbiór Z ma własność Baire'a.

Niech $x \in \{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\}$. Pokażemy, że Z_x jest rezydualny. Niech $H_x^n = \{y \in \mathbb{R} : G_n(x,y) = F_n(x,y)\}$. Dla wszystkich n zbiory H_x^n są rezydualne. Rzeczywiście,

$$H_x^n = \{y \in \mathbb{R} : G_n(x,y) = F_n(x,y)\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \Sigma_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n} \chi_{D_{m,n}}(x,y) + n\chi_{D_n}(x,y) = \Sigma_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}(x,y) + n\chi_{A_n}(x,y)\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \Sigma_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n} \chi_{(D_{m,n})_x}(y) + n\chi_{(D_n)_x}(y) = \Sigma_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n} \chi_{(A_{m,n})_x}(y) + n\chi_{(A_n)_x}(y)\}$$

$$\supset \bigcap_m [\mathbb{R} \setminus ((D_{m,n})_x \bigtriangleup (A_{m,n})_x)] \cap (\mathbb{R} \setminus ((A_n)_x \bigtriangleup (D_n)_x)).$$

Ale wiemy, że jeżeli $x \in \{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\}$ to $(D_{m,n})_x =_{\mathcal{M}} (A_{m,n})_x$ oraz $(D_n)_x =_{\mathcal{M}} (A_n)_x$, więc zbiory $((D_{m,n})_x) \bigtriangleup (A_{m,n})_x$ i $(A_n)_x \bigtriangleup (D_n)_x$ są pierwszej kategorii. Tak więc zbiór H_x^n jest rezydualny dla wszystkich n, a więc również zbiór $H = \bigcap_n H_x^n$ jest rezydualny. Ponieważ dla wszystkich $y \in H$ mamy, że $G_n(x,y) = F_n(x,y)$ i ciąg $\{F_n(x,y)\}$ jest zbieżny, więc ciąg $\{G_n(x,y)\}$ jest również zbieżny dla wszystkich $y \in H$. Ostatecznie otrzymaliśmy, że $H \subseteq Z_x$, więc cięcie Z_x jest rezydualne. Ponieważ zbiór $\{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\}$ jest rezydualny (na mocy Twierdzenia 1.1.19) otrzymujemy, że rezydualnie wiele cięć pionowych zbioru Z jest rezydualnych, więc na mocy Twierdzenia 1.1.19, zbiór Z jest rezydualny.

Definiujemy funkcję $G \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$G(x,y) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} G_n(x,y) & \text{jeżeli } (x,y) \in Z, \\ 0 & \text{jeżeli } (x,y) \notin Z. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja G ma własność Baire'a.

Pokażemy teraz, że funkcja G jest „prawie dobra”, tzn. dla rezydualnie wielu $x \in \mathbb{R}$ mamy $G_x =_{\mathcal{M}} F_x$. Niech $x \in \{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\}$. Wówczas dla wszystkich

$y \in H$ mamy $G_n(x,y) = F_n(x,y)$, więc $G_x(y) = F_x(y)$. Teraz wystarczy zmienić funkcję G następująco

$$\widehat{G}(x,y) = \begin{cases} G(x,y) & \text{jeżeli } x \in \{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\}, y \in \mathbb{R}; \\ F(x,y) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ponieważ zbiór $\{z \in \mathbb{R} : C_z \in \mathcal{M}\} \times \mathbb{R}$ jest rezydualny, więc funkcja $\widehat{G}$ ma własność Baire'a oraz $(\widehat{G})_x =_{\mathcal{M}} (F)_x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. □

Lemat 3.1.9. *Niech f będzie taka, że $\Delta_h f$ ma własność Baire'a dla każdego $h \in \mathbb{R}$. Jeżeli $\operatorname{non}^*(\mathcal{M}) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, to $\Delta_{(h,k)}(Df - G) =_{\mathcal{M}} 0$ dla wszystkich $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gdzie G jest funkcją z Lematu 3.1.8 dla funkcji $F = Df$.*

Dowód. Niech $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oznaczmy przez $B(x)$ taki zbiór rezydualny, że $G_x(y) = (Df)_x(y)$ dla wszystkich $y \in B(x)$. Mamy pokazać, że zbiór $A = (\Delta_{(h,k)}(Df - G))^{-1}(0)$ jest rezydualny. Po pierwsze zauważmy, że wszystkie cięcia pionowe zbioru A są rezydualne. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} A_x &= \{y \in \mathbb{R} \colon \Delta_{(h,k)}(Df - G)(x,y) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \colon \Delta_{(h,k)}(Df)(x,y) = \Delta_{(h,k)}(G)(x,y)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \colon Df(x+h, y+k) - Df(x,y) = G(x+h, y+k) - G(x,y)\}, \end{aligned}$$

ale wiemy, że $(Df)_{x+h}(y+k) = G_{x+h}(y+k)$ dla wszystkich $y \in B(x+h) - k$ i $(Df)_x(y) = G_x(y)$ dla wszystkich $y \in B(x)$. Ostatecznie mamy $(B(x+h) - k) \cap B(x) \subseteq A_x$, więc zbiór A_x jest rezydualny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Na mocy Lematu 3.1.7 i faktu, że funkcja G ma własność Baire'a, $\Delta_{(h,k)}(Df - G)$ ma również własność Baire'a. Tak więc zbiór A także ma własność Baire'a, czyli zbiór A jest rezydualny (na mocy Twierdzenia 1.1.19). □

Dowód Twierdzenia 3.1.1. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że wszystkie jej funkcje różnicowe mają własność Baire'a. Pokażemy, że funkcja Df ma własność Baire'a, a to zakończy dowód, ponieważ mamy Twierdzenie 3.1.3, które mówi, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma podwójną własność różnicy.

Przypuśćmy, że funkcja Df nie ma własności Baire'a. Wówczas istnieje $r \in \mathbb{R}$ takie, że zbiór $A = (Df - G)^{-1}((-\infty, r))$ nie ma własności Baire'a, gdzie G jest jak w Lemacie 3.1.8 dla funkcji $F = Df$.

Dla każdego $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zbiór $(A + (h,k)) \setminus A$ jest pierwszej kategorii. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} &(A + (h,k)) \setminus A \\ &= \{(x,y) \colon (Df - G)(x,y) < r\} + (h,k) \setminus \{(x,y) \colon (Df - G)(x,y) < r\} \\ &= \{(x+h, y+k) \colon (Df - G)(x,y) < r\} \setminus \{(x,y) \colon (Df - G)(x,y) < r\} \\ &= \{(x,y) \colon (Df - G)(x-h, y-k) < r\} \setminus \{(x,y) \colon (Df - G)(x,y) < r\} \\ &= \{(x,y) \colon (Df - G)(x-h, y-k) < r \wedge (Df - G)(x,y) \geqslant r\} \\ &\subseteq \{(x,y) \colon \Delta_{(-h,-k)}(Df - G)(x,y) \neq 0\}, \end{aligned}$$

ale ostatni zbiór jest pierwszej kategorii na mocy Lematu 3.1.9, więc również zbiór $(A + (h,k)) \setminus A$ jest pierwszej kategorii.

Tak więc zdanie $S_{\mathcal{M}}$ jest prawdziwe (skonstruowany powyżej zbiór A spełnia je). Ale na mocy Twierdzenia 3.1.5 dostajemy sprzeczność z naszym założeniem, że $\operatorname{non}^*(\mathcal{M}) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$. Sprzeczność otrzymaliśmy z przypuszczenia, że funkcja Df nie ma własności Baire'a. A to kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 3.1.2. Wiadomo, że modelem dla $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = 2^\omega = \omega_2$ jest model otrzymany przez dodanie ω_2 liczb Cohena do modelu GCH. Z drugiej strony wiadomo, że w modelu tym również $\mathrm{non}^*(\mathcal{M}) = \omega_1$ (patrz np. [Kom93, dowód Theorem 3] lub [KY96, Theorem 2.6]). Więc w tym modelu nierówność $\mathrm{non}^*(\mathcal{M}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ jest prawdziwa. Ostatecznie na mocy Twierdzenia 3.1.1 w tym modelu rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy. □

3.2 Podwójna własność różnicy

Laczkovich [Lac80] udowodnił, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma słabą własność różnicy, a następnie jako wniosek otrzymał, że rodzina ta ma podwójną własność różnicy. Poniżej pokażemy, że analogiczna implikacja zachodzi dla rodziny funkcji z własnością Baire'a.

Twierdzenie 3.2.1. *Słaba własność różnicy dla rodziny funkcji z własnością Baire'a implikuje podwójną własność różnicy dla tej rodziny.*

Dowód Twierdzenia 3.2.1 nie jest przepisaniem dowodu Laczkovicha, ponieważ narzędzia użyte przez niego nie działają dla własności Baire'a, m.in. użył on w swoim dowodzie Twierdzenia Fubiniego (wersja „całkowa") dla funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a

Ponieważ Mátrai [Mát03] udowodnił, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma słabą własność różnicy, więc korzystając z Twierdzenia 3.2.1 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.2 (Recław [Rec]). *Rodzina funkcji z własnością Baire'a ma podwójną własność różnicy.*

Uwaga. Twierdzenie 3.2.2 zostało wcześniej udowodnione przez Recława [Rec] bez korzystania z wyniku Mátraia.

Do dowodu Twierdzenia 3.2.1 wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 3.2.3. *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że $\Delta_h f =_{\mathcal{M}} 0$ dla wszystkich $h \in \mathbb{R}$ oraz Df ma własność Baire'a. Wówczas funkcja f ma własność Baire'a.*

Dowód. Niech $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ będzie zbiorem gęstym typu G_δ takim, że funkcja $(Df) \restriction G$ jest ciągła. Możemy założyć, że G_x jest rezydualny dla wszystkich $x \in pr_1(G) = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})(x, y) \in G\}$.

Stwierdzenie 3.2.4. *$Df(x, y) = -f(x)$ dla wszystkich $(x, y) \in G$.*

Dowód Stwierdzenia. Niech $x \in pr_1(G)$. Przypuśćmy, że istnieje $y_0 \in G_x$ taki, że $Df(x, y_0) \neq -f(x)$. Niech $H \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem gęstym typu G_δ takim, że $(\Delta_x f) \restriction H = 0$. Zbiór H istnieje na mocy założenia $\Delta_x f =_{\mathcal{M}} 0$. Wówczas $K = G_x \cap H$ jest również zbiorem gęstym typu G_δ takim, że funkcja $(Df) \restriction K$ jest ciągła. Niech $(y_n)_{n\in\omega}$ będzie ciągiem takim, że $y_n \in K$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Wówczas $\lim_{n\to\infty} Df(x, y_n) = Df(x, y_0) \neq -f(x)$. Ale z drugiej strony, $Df(x, y_n) = f(x + y_n) - f(x) - f(y_n) = \Delta_x f(y_n) - f(x) = 0 - f(x) = -f(x)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód stwierdzenia. □

Niech $s\colon pr_1(G) \to \mathbb{R}$ będzie uniformizacją borelowską dla G, tzn. funkcja s jest borelowska i $(x, s(x)) \in G$ dla każdego $x \in pr_1(G)$ ([Kec95, Theorem 18.6]). Ponieważ $(Df) \restriction G$ jest ciągła oraz $s \subseteq G$, więc również $(Df) \restriction s$ jest ciągła. Definiujemy funkcję $g\colon pr_1(G) \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = Df(x, s(x))$. Wówczas g jest funkcją borelowską. Ale $g(x) = -f(x)$ dla $x \in pr_1(G)$, więc funkcja $f \restriction pr_1(G)$ jest borelowska, czyli f ma własność Baire'a, bo $pr_1(G)$ jest rezydualny. $\square$

Dowód Twierdzenia 3.2.1. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że Df ma własność Baire'a. Wówczas łatwo pokazać, że również funkcja $\Delta_h f$ ma własność Baire'a dla każdego $h \in \mathbb{R}$. Następnie ze słabej własności różnicy otrzymujemy, że $f = g+A+S$, gdzie funkcja g ma własność Baire'a, A jest addytywna, a S jest taka, że $\Delta_h S =_{\mathcal{M}} 0$ dla wszystkich $h \in \mathbb{R}$. Ponieważ $DS = Df - Dg$, więc DS ma własność Baire'a. Na mocy Lematu 3.2.3 funkcja S ma własność Baire'a. Ostatecznie f jest sumą funkcji z własnością Baire'a i funkcji addytywnej. $\square$

Rozdział 4

Funkcje (s)-mierzalne

4.1 Własność różnicy

Twierdzenie 4.1.1. *Rodzina funkcji (s)-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Niech $\mathbb{R} = \{h_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ oraz G_α oznacza grupę generowaną przez $\{h_\beta : \beta < \alpha\}$. Niech $\mathcal{C}(X, Y)$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji ciągłych z X w Y.

Skonstruujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że:

1. wszystkie jej funkcje różnicowe są (s)-mierzalne,
2. f nie jest sumą funkcji (s)-mierzalnej i funkcji addytywnej.

Niech

$$\mathcal{A} = \{(D, g) : D \text{ jest zbiorem doskonałym oraz } g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})\}.$$

Niech $\mathcal{A} = \{(D_\alpha, g_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Zdefiniujemy dwa ciągi $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Niech $\alpha < \mathfrak{c}$ i załóżmy, że x_β i y_β są zdefiniowane dla każdego $\beta < \alpha$. Niech V_α oznacza grupę generowaną przez $h_\beta, x_\beta, y_\beta (\beta < \alpha)$. Wówczas $|V_\alpha| < \mathfrak{c}$, więc możemy wybrać element $x_\alpha \in D_\alpha \setminus (\frac{1}{2} \cdot V_\alpha)$. Definiujemy $y_\alpha = 2x_\alpha$, jeżeli $g_\alpha(x_\alpha) = -2$ oraz $y_\alpha = x_\alpha$ w przeciwnym przypadku. W ten sposób zdefiniowaliśmy x_α i y_α dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$.

Niech

$$A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} (G_\alpha + y_\alpha),$$

$$f = \chi_A.$$

Pokażemy, że funkcja f spełnia nasze założenia. Po pierwsze zauważmy, że $|(A + h) \setminus A| < \mathfrak{c}$ dla każdego h. Niech $h = h_\beta$. Wówczas $G_\alpha + h_\beta = G_\alpha$ dla każdego $\alpha > \beta$. A to implikuje, że $(A + h) \setminus A \subseteq \bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (G_\alpha + y_\alpha)$, co dowodzi, że $|(A + h) \setminus A| < \mathfrak{c}$. Ponieważ $A \setminus (A + h) = [(A - h) \setminus A] + h$, więc $|(A + h) \bigtriangleup A| < \mathfrak{c}$ dla każdego h. Ponieważ $\{x \in \mathbb{R} : \Delta_h f(x) \neq 0\} = (A - h) \bigtriangleup A$ i każdy zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $|B| < \mathfrak{c}$ należy do (s), więc pokazaliśmy, że $\Delta_h f$ jest (s)-mierzalna dla każdego h.

Przypuśćmy, że $f = g + A$ dla pewnej funkcji (s)-mierzalnej g i funkcji addytywnej A. Z Twierdzenia 1.1.1 wynika, że istnieje zbiór doskonały P_1 taki, że g jest ciągła na P_1. Stosując Twierdzenie 1.1.1 jeszcze raz, możemy znaleźć $P_2 \subseteq 2 \cdot P_1$ taki, że

g jest ciągła na P_2. Wówczas $f(2x) - 2f(x) = g(2x) - 2g(x)$ jest ciągła na $\frac{1}{2} \cdot P_2$. Niech $\alpha < \mathfrak{c}$ taki, że $\frac{1}{2} \cdot P_2 = D_\alpha$ i $f(2x) - 2f(x) = g_\alpha(x)$ dla każdego $x \in D_\alpha$. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki.

Jeśli $g_\alpha(x_\alpha) \neq -2$, to $y_\alpha = x_\alpha \in A$. Twierdzimy, że $2x_\alpha \notin A$. Rzeczywiście, jeśli $2x_\alpha \in A$, to $2x_\alpha \in G_\beta + y_\beta$ dla pewnego $\beta < \mathfrak{c}$. A to implikuje, że $x_\alpha \in \frac{1}{2} \cdot V_\alpha$, jeśli $\beta < \alpha; x_\alpha \in G_\alpha \subseteq V_\alpha$, jeśli $\beta = \alpha$ i $y_\beta \in G_\beta + 2x_\alpha \subseteq V_\beta$, jeśli $\beta > \alpha$. Ponieważ żaden z tych przypadków nie jest możliwy, otrzymujemy $2x_\alpha \notin A$. Tak więc $f(2x_\alpha) - 2f(x_\alpha) = -2 \neq g_\alpha(x_\alpha)$, sprzeczność.

Jeśli $g_\alpha(x_\alpha) = -2$, to $y_\alpha = 2x_\alpha \in A$. Argumentując jak powyżej, $x_\alpha \notin A$. Tak więc $f(2x_\alpha) - 2f(x_\alpha) = 1 \neq -2 = g_\alpha(x_\alpha)$, sprzeczność. □

4.2 Podwójna własność różnicy

Naturalne wydaje się pytanie: czy funkcja $f = \chi_A$, gdzie A jest zbiorem skonstruowanym w dowodzie Twierdzenia 4.1.1, jest również „świadkiem" braku podwójnej własności różnicy dla rodziny funkcji mierzalnych w sensie Marczewskiego? Niestety tak nie jest, jak pokazuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.1. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie (s_0)-prawie niezmienniczym zbiorem, który nie jest (s)-mierzalny. Wówczas funkcja $D\chi_A$ nie jest (s)-mierzalna.*

Dowód. Przypuśćmy, że $D\chi_A$ jest (s)-mierzalna. Wówczas funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = \chi_A(2x) - 2\chi_A(x)$ również byłaby (s)-mierzalna (bo jest to obcięcie funkcji $D\chi_A$ do przekątnej). Ale z drugiej strony $g^{-1}(\{-1, -2\}) = A$. □

Niestety pytanie o podwójną własność różnicy dla rodziny funkcji (s)-mierzalnych wciąż pozostaje otwarte.

Problem. Czy rodzina funkcji (s)-mierzalnych ma podwójną własność różnicy?

Oczywiście żadna funkcja charakterystyczna zbioru (s_0)-prawie niezmienniczego nie jest „świadkiem" na brak słabej własności różnicy dla rodziny funkcji (s)-mierzalnych. Również następujący problem pozostaje wciąż otwarty.

Problem. Czy rodzina funkcji (s)-mierzalnych ma słabą własność różnicy?

Rozdział 5

Funkcje borelowskie

Poniżej podajemy rozwiązanie problemu Laczkovicha [Lac02]. Pokażemy mianowicie, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.0.2. *Załóżmy CH. Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $(A+t) \setminus A$ jest borelowski dla każdego $t \in \mathbb{R}$, ale dla każdego $\alpha < \omega_1$ istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $(A+t) \setminus A \notin \Sigma^0_\alpha$.*

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy rozwiązanie wspomnianego problemu.

Twierdzenie 5.0.3. *Załóżmy CH. Wówczas istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $\Delta_h f$ jest borelowska dla każdego $h \in \mathbb{R}$, ale dla każdego $\alpha < \omega_1$ istnieje h takie, że $\Delta_h f$ nie jest klasy α Baire'a.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem z Twierdzenia 5.0.2. Wówczas funkcja charakterystyczna χ_A jest szukaną funkcją. □

Poniżej przedstawiamy dwa dowody Twierdzenia 5.0.2. Pierwszy dowód pochodzi z [FR02]. Natomiast drugi jest modyfikacją dowodu analogicznego twierdzenia (zamiast CH zakłada się CPA) podanego później przez Ciesielskiego i Pawlikowskiego [CPb].

Pierwszy dowód Twierdzenia 5.0.2. Niech $\mathbb{R} = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Niech G_α oznacza grupę generowaną przez $\{h_\beta : \beta < \alpha\}$.

Definiujemy zbiory P_α dla $\alpha < \omega_1$ tak, żeby:

1. P_α jest liniowo niezależnym zbiorem doskonałym,
2. $P_\alpha \cap \bigcup_{\beta<\alpha}(G_\alpha + P_\beta) = \emptyset$,
3. $(P_\alpha - P_\alpha) \cap \bigcup_{\beta<\alpha}(P_\beta - P_\beta) \subseteq \{0\}$.

Załóżmy, że mamy już P_β dla $\beta < \alpha$. Łatwo zauważyć, że zbiór $\bigcup_{\beta<\alpha}(P_\beta + G_\alpha)$ jest pierwszej kategorii. Z drugiej strony zbiór $\bigcup_{\beta<\alpha}(P_\beta - P_\beta)$ jest również pierwszej kategorii na mocy Faktu 1.1.17. Więc na mocy Twierdzenia 1.1.14 istnieje liniowo niezależny zbiór doskonały P_α spełniający wymagane warunki.

Niech teraz $B_\alpha \subseteq P_\alpha$ będzie dowolnym zbiorem borelowskim nie należącym do Σ^0_α (Twierdzenie 1.1.10).

Pokażemy, że

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (G_\alpha + B_\alpha)$$

jest szukanym zbiorem.

Po pierwsze musimy pokazać, że zbiór $(A + h) \setminus A$ jest borelowski dla każdego $h \in \mathbb{R}$. Niech $h \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $\beta < \omega_1$ takie, że $h = h_\beta$.

Lemat 5.0.4. $(A + h_\beta) \setminus A = \left[\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta)\right] \setminus \bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha)$

Dowód. Ponieważ $h_\beta \in G_\alpha$ dla każdego $\alpha > \beta$, więc

$$\begin{aligned}
(A + h_\beta) \setminus A &= \Big[\bigcup_{\alpha<\omega_1}(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta)\Big] \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1}(G_\alpha + B_\alpha) \\
&= \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta) \cup \bigcup_{\alpha>\beta}(G_\alpha + B_\alpha)\Big] \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1}(G_\alpha + B_\alpha) \\
&= \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta)\Big] \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1}(G_\alpha + B_\alpha).
\end{aligned}$$

Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnych $\alpha \leqslant \beta$ oraz $\gamma > \beta$ mamy

$$(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta) \cap (G_\gamma + B_\gamma) = \emptyset.$$

Ale w przeciwnym przypadku

$$(G_\gamma + B_\alpha) \cap B_\gamma \neq \emptyset,$$

sprzeczność. □

Na mocy powyższego lematu wszystkie zbiory $(A + h) \setminus A$ są borelowskie.

Pozostało do pokazania, że dla dowolnego $\alpha < \omega_1$ istnieje $h \in \mathbb{R}$ takie, że $(A + h) \setminus A \notin \Sigma^0_\alpha$.

Niech $\alpha < \omega_1$. Wówczas istnieje $\beta \geqslant \alpha$ takie, że $h_\beta \notin G_\beta$ (w przeciwnym przypadku istniałoby $\alpha < \omega_1$ takie, że $G_\alpha = \mathbb{R}$, co jest niemożliwe).

Gdyby $(A + h_\beta) \setminus A \in \Sigma^0_\alpha$, to również zbiór $[(A + h_\beta) \setminus A] \cap (P_\beta + h_\beta)$ byłby w tej rodzinie.

Z równości

$$(A + h_\beta) \setminus A = \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha + h_\beta)\Big] \setminus \bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha + B_\alpha)$$

i z następującego prostego faktu:

Fakt 5.0.5. *Jeżeli $(P - P) \cap (B - B) = \{0\}$, to $|(B + t) \cap P| \leqslant 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Jeżeli P jest liniowo niezależny, to $|(P + t) \cap P)| \leqslant 1$ dla każdego $t \neq 0$.*

wynika, że

$$[(A + h_\beta) \setminus A] \cap (P_\beta + h_\beta) = (B_\beta + h_\beta) \bigtriangleup Z,$$

gdzie Z jest zbiorem przeliczalnym, sprzeczność. □

Drugi dowód Twierdzenia 5.0.2. Niech $H \subseteq \mathbb{R}$ będzie bazą Hamela złożoną z ω_1 parami rozłącznych nieprzeliczalnych zbiorów domkniętych, tzn. $H = \bigcup_{\alpha<\omega_1} P_\alpha$, gdzie $P_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ są nieprzeliczalnymi parami rozłącznymi zbiorami domkniętymi.

Dla każdego $\alpha < \omega_1$ niech Q_α będzie borelowskim podzbiorem zbioru P_α, który nie jest w Σ^0_α (Twierdzenie 1.1.10). Ponadto niech G_α będzie przestrzenią liniową rozpiętą przez zbiór $\bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$.

Pokażemy, że

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (G_\alpha + Q_\alpha)$$

jest szukanym zbiorem.

Lemat 5.0.6. *Jeżeli* $t \in G_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha$, *to*

$$\Big(\bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \cap \Big(\bigcup_{\alpha\geqslant\beta} (G_\alpha + Q_\alpha)\Big) = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje $\alpha < \beta$ oraz $\gamma \geqslant \beta$ takie, że $((G_\alpha + Q_\alpha) + t) \cap (G_\gamma + Q_\gamma) \neq \emptyset$. Ponieważ $Q_\gamma \subseteq G_{\gamma+1} \setminus G_\gamma$, więc również $G_\gamma + Q_\gamma \subseteq G_{\gamma+1} \setminus G_\gamma$. Ale z drugiej strony, $(G_\alpha + Q_\alpha) + t \subseteq G_\beta$. A to daje sprzeczność z założeniem, że $\gamma \geqslant \beta$. □

Niech $t \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $\beta < \omega_1$ takie, że $t \in G_\beta$ oraz $t \notin G_\alpha$ dla $\alpha < \beta$. Korzystając z Lematu 5.0.6 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(A + t) \setminus A &= \Big(\bigcup_{\alpha<\omega_1} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \setminus A \\
&= \Big(\bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t \cup \bigcup_{\alpha\geqslant\beta} (G_\alpha + Q_\alpha)\Big) \setminus A \\
&= \Big(\bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \setminus A \\
&= \Big(\bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} (G_\alpha + Q_\alpha) \\
&= \Big(\bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} (G_\alpha + Q_\alpha),
\end{aligned}$$

ale ostatni zbiór jest zbiorem borelowskim (Twierdzenie 1.1.8).

Lemat 5.0.7. *Jeżeli* $t \in P_\beta \setminus Q_\beta$, *to*

$$\Big(\bigcup_{\alpha\leqslant\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \cap \Big(\bigcup_{\alpha<\omega_1} (G_\alpha + Q_\alpha)\Big) = \emptyset.$$

Dowód. Na mocy Lematu 5.0.6 wystarczy wykazać, że

$$\Big(\bigcup_{\alpha\leqslant\beta} (G_\alpha + Q_\alpha) + t\Big) \cap (G_\gamma + Q_\gamma) = \emptyset$$

dla każdego $\gamma \leqslant \beta$. Przypuśćmy, że istnieją $\alpha, \gamma \leqslant \beta$ takie, że $(G_\alpha + Q_\alpha + t) \cap (G_\gamma + Q_\gamma) \neq \emptyset$. Ale wówczas t należałby do przestrzeni generowanej przez zbiór $\bigcup_{\delta<\beta} P_\delta \cup Q_\beta$, co jest niemożliwe, bo $t \in P_\beta \setminus Q_\beta$. □

Musimy jeszcze pokazać, że klasa borelowska zbiorów postaci $(A+t)\setminus A$ nie jest ograniczona. Niech $\beta < \omega_1$. Niech $t \in P_\beta \setminus Q_\beta$.

Gdyby $(A+t)\setminus A \in \Sigma^0_\beta$, to również zbiór $((A+t)\setminus A)\cap(P_\beta+t)$ byłby w tej klasie. Ale wówczas korzystając z Lematu 5.0.7 mamy

$$((A+t)\setminus A)\cap(P_\beta+t) = \Big(\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(G_\alpha+Q_\alpha)+t\Big)\cap(P_\beta+t) = Q_\beta+t.$$

Ale zbiór $Q_\beta \notin \Sigma^0_\beta$, sprzeczność. $\square$

Rozdział 6

Uogólnienie twierdzenia Erdősa

Pokażemy, że rodziny funkcji mierzalnych nie mają „zwykle" własności różnicy, przy pewnych założeniach teoriomnogościowych. Ponadto wskażemy pewne rodziny funkcji mierzalnych, które nie mają własności różnicy w ZFC. Wyniki te rozszerzają wynik Erdősa dotyczący rodziny funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Twierdzenie 6.0.8 (Erdős)**.** *Załóżmy CH. Rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a nie ma własności różnicy.*

Dowód Twierdzenia 6.0.8 „działa" również dla rodziny funkcji z własnością Baire'a, jak i dla rodziny funkcji borelowskich. W dowodzie swojego twierdzenia Erdős używa dwóch kluczowych faktów:

1. Jeżeli założymy CH, to istnieje niemierzaly w sensie Lebesgue'a zbiór $\mathcal{N}$-prawie niezmienniczy[1].

2. Rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma słabą własność Ostrowskiego.

Poniżej pokażemy jak rozszerzyć wynik Erdősa m.in. na rodziny funkcji mierzalnych nie mających słabej własności Ostrowskiego.

W rozdziale tym zakładamy, że funkcje są określone na grupie o wartościach w $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{R}^n$).

Niech G będzie grupą abelową. Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów G oraz niech $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ będzie σ-ideałem na G.

Przez $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ będziemy oznaczali następujące zdanie:

Istnieje zbiór $A \subseteq G$ taki, że A jest $\mathcal{J}$-prawie niezmienniczy i $A \notin \mathcal{A}$,

a przez $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ zdanie:

Istnieje zbiór $A \subseteq G$ taki, że A jest $\mathcal{J}$-prawie niezmienniczy, $A \notin \mathcal{A}$ i $A = -A$.

[1] Zbiór taki został po raz pierwszy skonstruowany przez Sierpińskiego [Sie32].

6.1 Trywialne uogólnienie

Żeby powtórzyć dowód Erdősa (pokazujący, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a nie ma własności różnicy) dla rodziny funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych, jedyne co potrzebujemy to fakt, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma słabą własność Ostrowskiego oraz że zdanie $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ jest prawdziwe. Mamy więc następujące twierdzenie, które w zasadzie można przypisać Erdősowi.

Twierdzenie 6.1.1. *Załóżmy, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ ma słabą własność Ostrowskiego. Jeżeli zdanie $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ jest prawdziwe, to rodzina funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak dowód Erdősa, ale dla pełności przedstawiam go poniżej. Ze zdania $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ wynika istnienie zbioru $S \subseteq G$ takiego, że S jest $\mathcal{J}$-prawie niezmienniczy oraz $S \notin \mathcal{A}$. Niech $f = \chi_S$. Pokażmy teraz, że funkcja f jest „świadkiem" tego, że rodzina funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.

Ponieważ $\{x \in G : \Delta_h f \neq 0\} = \{x \in G : \chi_{S-h}(x) \neq \chi_S(x)\} = (S - h) \vartriangle S \in \mathcal{J}$, więc funkcja $\Delta_h f$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna dla każdego $h \in G$. Przypuśćmy teraz, że $f = g + A$, gdzie g jest $\mathcal{A}$-mierzalna, a A jest homomorfizmem. Wówczas istnieje n takie, że zbiór $B = g^{-1}([-n, n])$ należy do $\mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$, więc homomorfizm A jest ograniczony na B. Ze słabej własności Ostrowskiego wynika, że funkcja A jest $\mathcal{A}$-mierzalna, czyli funkcja $f = \chi_S$ jest również $\mathcal{A}$-mierzalna (jako suma dwóch funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych). Z drugiej strony zbiór S nie jest $\mathcal{A}$-mierzalny, sprzeczność. $\square$

Wniosek 6.1.2. *Niech G będzie lokalnie zwartą grupą topologiczną i niech μ będzie lewostronnie niezmienniczą miarą Haara na G. Jeżeli zdanie $S(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ jest prawdziwe, to rodzina funkcji $\mathcal{L}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Wynika z Twierdzeń 2.1.6 i 6.1.1. $\square$

Wniosek 6.1.3. *Niech G będzie grupą topologiczną. Jeżeli zdanie $S(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ jest prawdziwe, to rodzina funkcji $\mathcal{B}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Wynika z Twierdzeń 2.1.7 i 6.1.1. $\square$

6.2 Mniej trywialne uogólnienie

Pokażemy teraz, że nie zawsze para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ musi mieć słabą własność Ostrowskiego, żeby rodzin funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie miała własności różnicy.

Twierdzenie 6.2.1. *Niech $\mathcal{A}$ będzie niezmienniczym na odbicia σ-ciałem na grupie G, a $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ niech będzie σ-ideałem na G. Jeżeli zdanie $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ jest prawdziwe, to rodzina funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Niech $A \subseteq G$ będzie zbiorem takim, że $A \notin \mathcal{A}, A = -A$ oraz $(A + g) \vartriangle A \in \mathcal{J}$ dla każdego $g \in G$. Niech $f = \chi_A$. Pokażmy, że f jest „świadkiem" tego, że rodzina funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.

Po pierwsze łatwo zauważyć, że funkcja $\Delta_g f$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna dla każdego $g \in G$.

Przypuśćmy, że $f = k + h$ gdzie k jest $\mathcal{A}$-mierzalna, a h jest homomorfizmem. Definiujemy funkcję F wzorem $F(x) = f(x) + f(-x)$. Wówczas

$$F(x) = (k(x) + h(x)) + (k(-x) + h(-x)) = k(x) + k(-x),$$

więc funkcja F jest $\mathcal{A}$-mierzalna (bo $\mathcal{A} = -\mathcal{A}$). Ale z drugiej strony

$$F(x) = f(x) + f(-x) = \chi_A(x) + \chi_A(-x) = \chi_A(x) + \chi_{-A}(x) = 2\chi_A(x),$$

czyli funkcja F nie jest $\mathcal{A}$-mierzalna (bo $A \notin \mathcal{A}$).

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że funkcja f nie jest sumą odpowiednich funkcji, co kończy dowód. □

Zagadnieniem uogólniania metody Erdősa zajmuje się również Kotlicka [Kot03]. Udowodniła ona między innymi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.2.2 (Kotlicka [Kot03])**.** *Załóżmy, że ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ podzbiorów $\mathbb{R}^n$ są właściwe i niezmiennicze, przy czym $\mathcal{J}$ jest σ-ideałem z własnością Steinhausa i bazą borelowską. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji zawierającą wszystkie funkcje równe zero $\mathcal{I}$-prawie wszędzie i zawartą w rodzinie funkcji mierzalnych względem σ-ciała generowanego przez zbiory borelowskie i ideał $\mathcal{J}$. Jeżeli istnieje zbiór Bernsteina $B \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $(B + h) \setminus B \in \mathcal{I}$, to rodzina $\mathcal{F}$ nie ma własności różnicy.*

Zauważmy, że Twierdzenie 6.2.1 również jest prawdziwe dla większej ilości rodzin funkcji, tzn. dla rodzin $\mathcal{F}$ spełniających analogiczne warunki jak w Twierdzeniu 6.2.2. Jednakże brak założenia o własności Steinhausa w naszym twierdzeniu wymusza dodatkowe założenie o rodzinie $\mathcal{F}$. Musimy założyć, że jeżeli $f, g \in \mathcal{F}$, to również $f + g \in \mathcal{F}$ oraz $f(-x) \in \mathcal{F}$.

6.3 O zdaniach $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ i $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$

Widać, że w powyższych uogólnieniach (6.1 i 6.2), słabym punktem jest założenie, że zdanie $S(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ lub $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ jest prawdziwe. Poniżej sprawdzimy kiedy te zdania są prawdziwe.

Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem na grupie G, a $\mathcal{J}$ - σ-ideałem na G. Niech $|G| = \kappa$ oraz $G = \{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Przez G_α będziemy oznaczali grupę generowaną przez zbiór $\{g_\beta : \beta < \alpha\}$. Dla dowolnego $\alpha < \kappa$ niech $Q_\alpha = G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$. Ponadto dla dowolnego zbioru $T \subseteq \kappa$, $A_T = \bigcup_{\alpha \in T} Q_\alpha$.

Lemat 6.3.1. *Jeżeli* $\mathrm{non}(\mathcal{J}) = |G|$, *to zbiór A_T jest $\mathcal{J}$-prawie niezmienniczy i $A_T = -A_T$ dla dowolnego zbioru $T \subseteq \kappa$.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego zbioru $T \subseteq \kappa$ i dla dowolnego $g \in G$ zbiór $(A_T + g) \setminus A_T$ jest w $\mathcal{J}$. Rzeczywiście, niech $T \subseteq \kappa$ oraz $g \in G$. Wówczas

$$(A_T + g) \setminus A_T = \bigcup_{\alpha \in T} (Q_\alpha + g) \setminus \bigcup_{\alpha \in T} Q_\alpha = \bigcup_{\alpha \in T} [(G_{\alpha+1} + g) \setminus (G_\alpha + g)] \setminus \bigcup_{\alpha \in T} Q_\alpha.$$

Ale ponieważ istnieje $\beta < \kappa$ takie, że dla każdego $\alpha > \beta$ mamy $g \in G_\alpha$, to

$$(A_T + g) \setminus A_T = \Big[\bigcup_{T \ni \alpha \leqslant \beta} (Q_\alpha + g) \cup \bigcup_{T \ni \alpha > \beta} (G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha) \Big] \setminus \bigcup_{\alpha \in T} Q_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (Q_\alpha + g).$$

Z założenia $\mathrm{non}(\mathcal{J}) = |G|$ wynika, że ostatni zbiór należy do $\mathcal{J}$, więc zbiór $(A_T + g) \setminus A_T$ należy do $\mathcal{J}$. Podobnie pokazujemy, że zbiór $A_T \setminus (A_T + g)$ należy do $\mathcal{J}$, więc $(A_T + g) \triangle A_T \in \mathcal{J}$.

Ponieważ $Q_\alpha = -Q_\alpha$ dla każdego $\alpha < \kappa$, więc $A_T = -A_T$ dla dowolnego zbioru $T \subseteq \kappa$. □

Konstrukcje zbiorów prawie niezmienniczych pojawiały (i pojawiają) się w pracach poświęconych rozszerzeniom miar niezmienniczych. Powyższa konstrukcja pojawiła się m.in. w [Hul62] oraz [Zak96].

Podsumowując widać, że zdanie $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ będzie prawdziwe, o ile znajdziemy zbiór T taki, że $A_T \notin \mathcal{A}$. Poniżej pokażemy jak to zrobić dla pewnych rodzin $\mathcal{A}$. Lemat 6.3.1 wymaga jednego założenia $\mathrm{non}(\mathcal{J}) = |G|$. W niektórych przypadkach będziemy również potrzebowali innych założeń. Z drugiej strony podamy również przykłady rodzin $\mathcal{A}$, dla których będziemy mogli opuścić wszystkie założenia (również założenie z Lematu 6.3.1) i udowodnimy zdanie $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ (czyli również brak własności różnicy dla odpowiedniej rodziny funkcji) w ZFC.

6.3.1 Wyniki niesprzecznościowe

Poniżej podamy przykłady σ-ciał i σ-ideałów, dla których zdanie $S^*(\cdot,\cdot)$ jest prawdziwe przy pewnych założeniach teoriomnogościowych, a co za tym idzie, na mocy Twierdzenia 6.2.1, odpowiednie rodziny funkcji nie mają własności różnicy.

Przypadek miary

Twierdzenie 6.3.2. *Niech μ będzie σ-skończoną miarą na grupie G. Jeżeli $|G|$ jest mniejsza niż pierwsza liczba rzeczywiście mierzalna oraz* $\mathrm{non}(\mathcal{N}(\mu)) = |G|$, *to zdanie $S^*(\mathcal{L}(\mu), \mathcal{N}(\mu))$ jest prawdziwe.*

Dowód. Przypuśćmy, że dla każdego zbioru $T \subseteq \kappa$ zbiór A_T jest $\mathcal{L}$-mierzalny. Z Faktu 1.1.2 istnieje miara skończona ν, która jest równoważna μ. Definiujemy miarę $\tau\colon P(\kappa) \to [0, +\infty]$ wzorem $\tau(T) = \nu(A_T)$. Jest to ciągła, skończona miara, która mierzy wszystkie podzbiory κ, więc na mocy Twierdzenia 1.1.3 istnieje rzeczywiście mierzalna liczba kardynalna $\leqslant \kappa = |G|$, sprzeczność z założeniem. $\square$

Wniosek 6.3.3. *Jeżeli miara μ jest niezmiennicza na odbicia, to przy założeniach Twierdzenia 6.3.2 rodzina funkcji $\mathcal{L}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 i 6.3.2. $\square$

Przypadek kategorii

Twierdzenie 6.3.4. *Niech G będzie grupą topologiczną. Jeżeli $|G|$ jest mniejsza niż pierwsza liczba mierzalna oraz* $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = |G|$, *to zdanie $S^*(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ jest prawdziwe.*

Dowód. Przypuśćmy, że dla każdego $T \subseteq \kappa$ mamy $A_T \in \mathcal{M}$ albo $G \setminus A_T \in \mathcal{M}$. Wówczas rodzina $\{T \subseteq \kappa : A_T \in \mathcal{M}\}$ jest σ-ideałem pierwszym na κ zawierającym wszystkie zbiory jednoelementowe. Więc na mocy Faktu 1.1.5 i Twierdzenia 1.1.3 istnieje mierzalna liczba kardynalna $\leqslant \kappa = |G|$, a to jest sprzeczność z założeniem. Istnieje więc $T_0 \subseteq \kappa$ taki, że $A_{T_0} \notin \mathcal{M}$ i $G \setminus A_{T_0} \notin \mathcal{M}$, co implikuje, że zbiór A_{T_0} nie ma własności Baire'a. Rzeczywiście, gdyby $A_{T_0} \in \mathcal{B}$, to istniałby $g \in G$ taki, że $(A_{T_0} + g) \cap (G \setminus A_{T_0}) \notin \mathcal{M}$, czyli $(A_{T_0} + g) \setminus A_{T_0} \notin \mathcal{M}$, a to jest niemożliwe, ponieważ zbiór A_{T_0} jest $\mathcal{M}$-prawie niezmienniczy (na mocy Lematu 6.3.1). $\square$

Wniosek 6.3.5. *Przy założeniach Twierdzenia 6.3.4 rodzina funkcji $\mathcal{B}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 i 6.3.4. $\square$

Przypadek c.c.c.

Teraz uogólnimy przypadek miarowy i kategoryjny na przypadek, gdy dane są σ-ciało $\mathcal{A}$ i σ-ideał $\mathcal{J}$ na grupie G takie, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ spełnia c.c.c.

Twierdzenie 6.3.6. *Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem na grupie G, a $\mathcal{J}$ - właściwym σ-ideałem na G takimi, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ spełnia c.c.c. Jeżeli $|G|$ jest mniejsza niż pierwsza quasi-mierzalna liczba kardynalna oraz* $\mathrm{non}(\mathcal{J}) = |G|$, *to zdanie $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ jest prawdziwe.*

Dowód. Przypuśćmy, że $A_T \in \mathcal{A}$ dla każdego $T \subseteq \kappa$. Niech $\mathcal{I} = \{T \subseteq \kappa : A_T \in \mathcal{J}\}$. Wówczas nietrudno sprawdzić, że $\mathcal{I}$ jest σ-ideałam właściwym zawierającym wszystkie zbiory jednoelementowe. Ponieważ para $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ spełnia c.c.c., więc również para $(P(\kappa), \mathcal{I})$ spełnia c.c.c. Ale to oznacza, że ideał $\mathcal{I}$ jest ω_1-nasycony. Więc na mocy Faktu 1.1.6 istnieje quasi-mierzalna liczba kardynalna $\leqslant |G|$, sprzeczność z założeniem. □

Wniosek 6.3.7. *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest niezmienniczym na odbicia σ-ciałem, to przy założeniach Twierdzenia 6.3.6 rodzina funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 oraz 6.3.6. □

Uwaga. Mimo, że rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (z własnością Baire'a) spełnia c.c.c., Twierdzenie 6.3.6 nie implikuje Twierdzenia 6.3.2 (6.3.4). Wynika to z faktu, że jeżeli istnieje model, w którym jest mierzalna liczba kardynalna, to istnieje model dla Aksjomatu Martina, w którym istnieje quasi-mierzalna liczba kardynalna $< \mathfrak{c}$ (patrz m.in. [Fre93]). W takim modelu nie ma rzeczywiście mierzalnych liczb kardynalnych $\leqslant \mathfrak{c}$.

6.3.2 Wyniki w ZFC

Poniżej podamy przykłady σ-ciał i σ-ideałów dla których zdanie $S^*(\cdot, \cdot)$ jest prawdziwe w ZFC, a co za tym idzie, na mocy Twierdzenia 6.2.1, odpowiednie rodziny funkcji nie mają własności różnicy.

Zbiory (s)-mierzalne

Twierdzenie 6.3.8. *Zdanie $S^*((s), (s_0))$ jest prawdziwe.*

Dowód. Mamy skonstruować zbiór A, który nie jest (s)-mierzalny oraz $A = -A$ i $(A + x) \setminus A \in (s_0)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zrobimy to zmieniając trochę konstrukcję Sierpińskiego [Sie32]. Niech $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ oraz $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będą odpowiednio: ciągiem wszystkich liczb rzeczywistych oraz zbiorów doskonałych. Ponadto niech L_α będzie przestrzenią liniową rozpiętą przez $\{r_\beta : \beta < \alpha\}$. Skonstruujemy teraz dwa ciągi $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Elementy tych ciągów wybieramy w następujący sposób:

$$x_\alpha \in P_\alpha \setminus (L_\alpha + (\{\pm x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\pm y_\beta : \beta < \alpha\}))$$

i

$$y_\alpha \in P_\alpha \setminus (L_\alpha + (\{\pm x_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \cup \{\pm y_\beta : \beta < \alpha\})).$$

Pokażemy, że zbiór

$$A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} (L_\alpha \pm x_\alpha)$$

spełnia zdanie $S^*((s),(s_0))$.

Widać, że $A = -A$. Pokazując, że A jest zbiorem Bernsteina udowodnimy, że nie jest on (s)-mierzalny. Po pierwsze, $A \cap P \neq \emptyset$ dla każdego zbioru doskonałego P (bo $x_\alpha \in A$). Z drugiej strony przypuśćmy, że istnieje $\beta < \mathfrak{c}$ takie, że $y_\beta \notin \mathbb{R} \setminus A$. Wówczas istnieje α takie, że $y_\beta \in L_\alpha \pm x_\alpha$. Jeśli $\beta \geqslant \alpha$, to otrzymujemy sprzeczność z definicją punktu y_α. Więc $\alpha > \beta$. Ale w tym przypadku $x_\alpha \in L_\alpha \pm y_\beta$ – również sprzeczność.

Pozostało do udowodnienia, że A jest (s_0)-prawie niezmienniczy. Wystarczy pokazać, że $|(A+r) \setminus A| < \mathfrak{c}$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$ (bo wszystkie zbiory mocy mniejszej od $\mathfrak{c}$ należą do (s_0)). Dla każdego $r \in \mathbb{R}$ istnieje $\beta < \mathfrak{c}$ taka, że $r = r_\beta$. Ponieważ $r_\beta \in L_\alpha$ dla każdego $\alpha > \beta$ więc

$$(A + r_\beta) \setminus A = (\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} (L_\alpha \pm x_\alpha + r_\beta)) \setminus A =$$

$$= (\bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha + r_\beta) \cup \bigcup_{\alpha > \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha)) \setminus A =$$

$$= (\bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha + r_\beta) \setminus A) \cup (\bigcup_{\alpha > \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha) \setminus A) =$$

$$= (\bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha + r_\beta) \setminus A) \subseteq \bigcup_{\alpha \leqslant \beta} (L_\alpha \pm x_\alpha + r_\beta),$$

a ostatni zbiór jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$. □

Wniosek 6.3.9. *Rodzina funkcji (s)-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 i 6.3.8. □

Uwaga. Wniosek 6.3.9 został udowodniony w Rozdziale 4. Aczkolwiek w Rozdziale 4 został on pokazany bezpośrednio (poprzez konstrukcję odpowiedniej funkcji) podczas, gdy tutaj użyliśmy do tego ogólnego twierdzenia (Twierdzenie 6.2.1), które stosuje się również w wielu innych przypadkach.

Uwaga. Ponieważ zdanie $S^*((s),(s_0))$ jest prawdziwe, więc również zdanie $S((s),(s_0))$ jest prawdziwe. Ale nie mogliśmy użyć Twierdzenia 6.1.1 zamiast Twierdzenia 6.2.1 do pokazania Wniosku 6.3.9, ponieważ para $((s),(s_0))$ nie ma słabej własności Ostrowskiego (Twierdzenie 2.1.11).

Podgrupa z miarą

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem miary zewnętrznej Lebesgue'a dodatniej. Definiujemy

$$\mathcal{L}_X = \{A \cap X : A \text{ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a}\}$$

i

$$m_X \colon \mathcal{L}_X \to [0, +\infty], m_X(B) = m^o(B),$$

gdzie m^o oznacza miarę zewnętrzną Lebesgue'a, a $B \in \mathcal{L}_X$. Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{L}_X$ jest σ-ciałem, a m_X jest miarą na $\mathcal{L}_X$. Ponadto $\mathrm{non}(\mathcal{N}(m_X)) = \mathrm{non}(\mathcal{N}(m))$.

Twierdzenie 6.3.10. *Istnieje podgrupa $G \subseteq \mathbb{R}$ taka, że zdanie $S^*(\mathcal{L}_G, \mathcal{N}(m_G))$ jest prawdziwe.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie niemierzalnym w sensie Lebesgue'a zbiorem mocy $\kappa = \text{non}(\mathcal{N}(m))$. Niech G będzie grupą generowaną przez zbiór X. Wówczas $|G| = \kappa$.

Ponieważ $|G| = \text{non}(\mathcal{N}(m))$, więc na mocy Twierdzenia 1.1.7, $|G|$ jest mniejsza niż pierwsza rzeczywiście mierzalna liczba kardynalna. Ponadto $\text{non}(\mathcal{N}(m_G)) = \text{non}(\mathcal{N}(m)) = |G|$. Tak więc na mocy Twierdzenia 6.3.2 zdanie $S^*(\mathcal{L}_G, \mathcal{N}(m_G))$ jest prawdziwe. □

Wniosek 6.3.11. *Rodzina funkcji m_G-mierzalnych nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 i 6.3.10. □

Uwaga. Można pokazać, że Twierdzenie 6.3.10 jest prawdziwe dla każdej niemierzalnej w sensie Lebesgue'a grupy mocy $\text{non}(\mathcal{N}(m))$.

Podgrupa z topologią

Twierdzenie 6.3.12. *Istnieje podgrupa $G \subseteq \mathbb{R}$ taka, że zdanie $S^*(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ jest prawdziwe.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem bez własności Baire'a mocy $\kappa = \text{non}(\mathcal{M}(\mathbb{R}))$. Niech G będzie grupą generowaną przez zbiór $X \cup \mathbb{Q}$. Wówczas $|G| = \kappa$.

Ponieważ $|G| \leqslant \mathfrak{c}$, więc na mocy Twierdzenia 1.1.4, $|G|$ jest mniejsza od pierwszej mierzalnej liczby kardynalnej. Ponadto, $\text{non}(\mathcal{M}(G)) = \text{non}(\mathcal{M}(\mathbb{R})) = |G|$ (bo grupa G jest jest gęsta w $\mathbb{R}$). Tak więc, na mocy Twierdzenia 6.3.4, zdanie $S^*(\mathcal{B}(G), \mathcal{M}(G))$ jest prawdziwe. □

Wniosek 6.3.13. *Rodzina funkcji z własnością Baire'a na G nie ma własności różnicy.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenia 6.2.1 i 6.3.12. □

Uwaga. Można pokazać, że Twierdzenie 6.3.12 jest prawdziwe dla każdej gęstej grupy bez własności Baire'a mocy $\text{non}(\mathcal{M}(\mathbb{R}))$.

Bibliografia

[BK03] M. Balcerzak, E. Kotlicka. Steinhaus property for products of ideals. *Publ. Math. Debrecen*, 63(1-2):235–248, 2003.

[BKW99] M. Balcerzak, E. Kotlicka, W. Wojdowski. Difference functions for functions with the Baire property. *Aequationes Math.*, 57:278–287, 1999.

[CFF02] K. Ciesielski, H. Fejzić, C. Freiling. Measure zero sets with nonmeasurable sum. *Real Anal. Exchange*, 27(2):783–793, 2001/02.

[CJ03] J. Cichoń, A. Jasiński. A note on algebraic sums of subsets of the real line. *Real Anal. Exchange*, 28(2):493–499, 2002/03.

[CKW95] J. Cichoń, A. Kharazishvili, B. Węglorz. *Subsets of the Real Line.* Łódź University Press, 1995.

[CPa] K. Ciesielski, J. Pawlikowski. *Covering Property Axiom CPA.* Ukaże się w Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge Univ. Press.

[CPb] K. Ciesielski, J. Pawlikowski. Nice Hamel bases under the Covering Property Axiom. *Ukaże się w Acta Math. Hungar.*

[CS] J. Cichoń, P. Szczepaniak. When is the unit ball nonmeasurable? *Ukaże się w Real Anal. Exchange.*

[dB51] N. G. de Bruijn. Functions whose differences belong to a given class. *Nieuw Arch. Wisk.*, 23:194–218, 1951.

[DFa] F. Dorais, R. Filipów. A note on algebraic sums of Marczewski measurable sets. *W przygotowaniu.*

[DFb] F. Dorais, R. Filipów. Total Failiure of Automatic Continuity for Marczewski Measurable Functions. *W przygotowaniu.*

[Fil01] R. Filipów. A note on the double difference property. *Nieopublikowane*, 2001.

[Fil03a] R. Filipów. On the difference property of families of measurable functions. *Colloq. Math.*, 97(2):169–180, 2003.

[Fil03b] R. Filipów. On the difference property of the family of functions with the Baire property. *Acta Math. Hungar.*, 100(1-2):97–104, 2003.

[FR02] R. Filipów, I. Recław. On the difference property of Borel measurable and (s)-measurable functions. *Acta Math. Hungar.*, 96(1-2):21–25, 2002.

[Fré13] M. Fréchet. Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *L'Ens. Math.*, 15:390–393, 1913.

[Fre93] D.H. Fremlin. Real-valued-measurable cardinals. Haim Judah, redaktor, *Set theory of the reals*, wolumen 6 serii *Israel Math. Conf. Proc.*, strony 151–304. Bar-Ilan Univ., 1993.

[Hul62] A. Hulanicki. Invariant extensions of the Lebesgue measure. *Fund. Math.*, 51:111–115, 1962.

[Jon42] F.B. Jones. Measure and other properties of a Hamel basis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48:472–481, 1942.

[Kec95] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, wolumen 156 serii *Grad. Texts in Math.* Springer, 1995.

[Kha56a] A. Kharazishvili. On the Steinhaus property for invariant measures. *Real Anal. Exchange*, 21(2):743–749, 1995/6.

[Kha56b] A. Kharazishvili. Some remarks on additive properties of invariant σ-ideals on the real line. *Real Anal. Exchange*, 21(2):715–724, 1995/6.

[Kom93] P. Komjáth. Some remarks on second category sets. *Colloq. Math.*, 66:57–62, 1993.

[Kot03] E. Kotlicka. *Własności funkcji różnicowych dla wybranych klas funkcji rzeczywistych.* Praca doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2003.

[KS76] M. Kuczma, J. Smítal. On measures connected with the Cauchy equation. *Aequationes Math.*, 14:421–428, 1976.

[Kuc85] M. Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

[Kur56] S. Kurepa. Convex functions. *Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II*, 11(2):89–93, 1956.

[KY96] M. Kada, Y. Yuasa. Cardinal invariants about shrinkability of unbounded sets. *Topology Appl.*, 74:215–223, 1996.

[Kys] M. Kysiak. Nonmeasurable algebraic sums of sets of reals. *Wysłane do Fund. Math.*

[Lac80] M. Laczkovich. Functions with measurable differences. *Acta Math. Hungar.*, 35:217–235, 1980.

[Lac02] M. Laczkovich. The difference property. G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits, V.T. Soś, redaktorzy, *Paul Erdős and His Mathematics*, wolumen 11 serii *Bolyai Society Math. Studies*, strony 363–410. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

[Lac99] M. Laczkovich. Two constructions of Sierpiński and some cardinal invariants of ideals. *Real Anal. Exchange*, 24:663–676, 1998/99.

[Mát03] T. Mátrai. Weak difference property of functions with the Baire property. *Fund. Math.*, 177(1):1–17, 2003.

[Meh64] M. R. Mehdi. On convex functions. *J. London Math. Soc.*, 39:321–326, 1964.

[MP00] A. W. Miller, S. G. Popvassilev. Vitali sets and Hamel bases that are Marczewski measurable. *Fund. Math.*, 166(3):269–279, 2000.

[Myc64] J. Mycielski. Independent sets in topological algebras. *Fund. Math.*, 55:139–147, 1964.

[Now00] A. Nowik. Some topological properties of ω-covering sets. *Czechoslovak Math. J.*, 50(125):865–877, 2000.

[NW] T. Natkaniec, W. Wilczyński. Sums of periodic Darboux functions and measurability. *Preprint*.

[Ost29] A. Ostrowski. Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 38:54–62, 1929.

[Pic39] S. Piccard. Sur les ensembles de distances de points d'un espace euklidean. *Mêm. Univ. Neuchâtel*, 13, 1939.

[Rec] I. Recław. On the double difference property for functions with Baire property. *Preprint*.

[RZ99] I. Recław, P. Zakrzewski. Strong Fubini properties of ideals. *Fund. Math.*, 159:135–152, 1999.

[Sie20] W. Sierpiński. Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel. *Fund. Math.*, 1:105–111, 1920.

[Sie32] W. Sierpiński. Sur les translations des ensembles linéaires. *Fund. Math.*, 19:22–28, 1932.

[Ste20] H. Steinhaus. Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. *Fund. Math.*, 1:93–104, 1920.

[Szp35] E. Szpilrajn. Sur un classe de fonctions de Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles. *Fund. Math.*, 24:17–34, 1935.

[vN28] J. von Neumann. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. *Math. Ann.*, 99:134–141, 1928.

[Wag93] S. Wagon. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Zak96] P. Zakrzewski. Extending invariant measures on topological groups. *The Proceedings of the Tenth Summer Conference on Topology and Applications*, wolumen 788 serii *Annals of the New York Academy of Sciences*, strony 218–222, 1996.